

УДК 551.594

## МОДЕЛЬ ГЛОБАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ С УСЛОВИЯМИ В МАГНИТО-СОПРЯЖЕННЫХ ТОЧКАХ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЫ АТМОСФЕРЫ В НЕСТАЦИОНАРНОМ СЛУЧАЕ

© 2025 г. Н. А. Денисова\*

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (ННГУ), Нижний Новгород, Россия

\*e-mail: natasha.denisova@mail.ru

Поступила в редакцию 19.12.2023 г.

После доработки 26.06.24 г.

Принята к публикации 26.09.2024 г.

Получено новое аналитическое представление электрического потенциала для классической нестационарной модели глобальной электрической цепи атмосферы, занимающей шаровой слой, проводимость которой экспоненциально возрастает по радиусу. В краевых условиях модели учитывается связь значений электрического потенциала и тока в магнито-сопряженных точках верхней границы атмосферы. С использованием полученного представления анализируется распределение потенциала для токового диполя в шаровом слое. Получены новые асимптотические формулы для электрического потенциала токового диполя при  $t \rightarrow \infty$  в каждой точке шарового слоя. Найдено аналитическое выражение функции Грина соответствующей начально-краевой задачи.

**Ключевые слова:** атмосферное электричество, глобальная электрическая цепь, граничные условия в магнито-сопряженных точках, нестационарная модельная задача, аналитическое решение

DOI: 10.31857/S0016794025020072, EDN: CXIX

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В теории атмосферного электричества предложено несколько математических моделей глобальной электрической цепи (ГЭЦ), основанных на исследовании распределения потенциала электрического поля, вызванного сторонними токами, моделирующими токи разделения в грозовом облаке. Большинство математических моделей сводится к нахождению потенциала электрического поля из краевой задачи (в стационарном случае) или начально-краевой задачи (в нестационарном случае) для дифференциального уравнения в некоторой области. В этих задачах могут меняться 1) область, в которой решается задача, 2) функция, моделирующая проводимость атмосферы, 3) правая часть уравнения, моделирующая грозовые генераторы, и 4) граничные условия. С основными результатами теории ГЭЦ и обзором литературы можно познакомиться в публикациях [Мареев, 2010; Мареев и др., 2019; Морозов, 2011].

В данной работе рассматривается нестационарная классическая модель ГЭЦ для атмосферы, занимающей шаровой слой, где в качестве краевых условий на верхней границе атмосферы используются соотношения, связывающие значение

электрического потенциала и тока в магнито-сопряженных точках. Такие граничные условия для стационарной задачи использовались в работах [Hays and Roble, 1979; Ogawa, 1985]. Вопросы математической корректности постановок задач как в стационарном, так и в нестационарном случаях с такими граничными условиями обсуждаются в работе [Kalinin and Slyunyaev, 2017].

Аналогичная нестационарная задача с более простым граничным условием рассматривалась в работе [Морозов, 2005]. Главным основанием для использования простого граничного условия являлось утверждение о том, что в нижней атмосфере верхнее граничное условие не оказывает влияние на решение.

В работе [Денисова и Калинин, 2018] была предпринята попытка сравнить аналитические решения двух соответствующих стационарных задач с различными условиями на верхней границе атмосферы. В работе показано, что, если верхняя граница шарового слоя находится на высоте большей 90 км то действительно есть часть шарового слоя, содержащая токовые генераторы, в которой значения решений двух разных краевых задач близки. Однако, в части шарового слоя, расположе-

женной над генераторами, эти решения различны. Если верхняя граница шарового слоя находится на высоте, меньшей 70 км решения задач отличаются во всем шаровом слое, и особенно в магнито-сопряженных точках на всех высотах. Так как решения задач с разными краевыми условиями в области выше токовых генераторов различны при любой толщине шарового слоя, то исследование распределения электрического поля в задаче с граничными условиями [Hays and Roble, 1979] на верхней границе атмосферы, учитывающими магнито-сопряженные точки, представляет интерес.

Целью настоящей работы является аналитическое решение начально-краевой задачи для потенциала в атмосфере, электрическая проводимость которой экспоненциально растет, с граничными условиями [Hays and Roble, 1979] на верхней границе шарового слоя. Нахождение функции Грина соответствующей начально-краевой задачи. Исследование распределения потенциала токового диполя и получение асимптотических формул при  $t \rightarrow \infty$ .

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Электрический потенциал  $\Phi(r, \theta, \phi, t)$  атмосферы, занимающей шаровой слой  $r_0 < r < r_m$ , при включении в начальный момент вертикального тока удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \Phi) = \operatorname{div} \mathbf{j}^{ext}, \quad (1)$$

граничным

$$\Phi(r, \theta, \phi, t) \Big|_{r=r_m} = \Phi(r, \pi - \theta, \phi, t) \Big|_{r=r_m}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi(r, \theta, \phi, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_m} = - \frac{\partial \Phi(r, \pi - \theta, \phi, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_m}, \quad (3)$$

$$\Phi \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (4)$$

$$\text{и начальному} \quad \Phi \Big|_{t=0} = 0 \quad (5)$$

условиям.

Далее в работе предполагается, что электрическая проводимость атмосферы  $\sigma$  зависит только от радиуса и экспоненциально возрастает по радиусу

$$\sigma(r) = \sigma_0 \exp\left(\frac{r - r_0}{H}\right),$$

$\sigma_0$  – электрическая проводимость вблизи сферической земной поверхности;  $r$  – расстояние от центра Земли;  $r_0$  – радиус Земли (при численных расчетах использовались следующие значения:  $r_0 = 6370$  км,  $H = 6$  км; высота магнитосферы  $h_m = r_m - r_0$ ,  $h_m = 100$  км);  $\mathbf{j}^{ext}$  – плотность сторонних электрических токов, создаваемых грозовыми генераторами;  $r, \theta, \phi$  – сферические координаты.

Будем рассматривать отдельный источник стороннего тока с номером  $s$ . В случае нескольких источников тока в формулах, приведенных ниже, следует провести суммирование по переменной  $s$ . Плотность стороннего радиального электрического тока запишем в виде [Денисов и Калинин, 2018]

$$\mathbf{j}^{ext} = \frac{I_{s0}(t)}{r^2 \sin \theta} \delta_{N_s}(\theta, \theta_s, \phi, \phi_s) (\vartheta(r - r_{s0}) - \vartheta(r - r_{s1})) \mathbf{e}_r,$$

где  $r_{s1}$  и  $r_{s0}$  – радиальные расстояния, соответствующие положительному и отрицательному зарядам грозового генератора, причем  $r_{s0} < r_{s1}$ ;  $I_{s0}(t)$  – сила тока. Функцией  $\vartheta(r)$  обозначена функция Хевисайда. Функция  $\frac{1}{\sin \theta} \delta_{N_s}(\theta, \theta_s, \phi, \phi_s)$  содержит дополнительный параметр  $N_s$  и имеет вид:

$$\frac{1}{\sin \theta} \delta_{N_s}(\theta, \theta_s, \phi, \phi_s) = \sum_{n=0}^{N_s} \sum_{k=0}^n \frac{\left[ Y_{n,k}^{(1)}(\theta, \phi) Y_{n,k}^{(1)}(\theta_s, \phi_s) + Y_{n,k}^{(2)}(\theta, \phi) Y_{n,k}^{(2)}(\theta_s, \phi_s) \right]}{\|Y_{n,k}\|^2} = \sum_{n=0}^{N_s} \frac{(2n+1)}{4\pi} P_n(\cos \gamma). \quad (6)$$

Здесь введено обозначение

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_s + \sin \theta \sin \theta_s \cos(\phi - \phi_s),$$

$Y_{n,k}^{(1)}(\theta, \phi), Y_{n,k}^{(2)}(\theta, \phi)$  – вещественные сферические функции;  $P_n(\cos \gamma)$  – полиномы Лежандра, нормы сферических функций из первого и втор-

ого семейств совпадают, поэтому верхний индекс при записи норм  $\|Y_{n,k}\|$  отсутствует.

Если  $N_s = \infty$ , то ряд, стоящий в правой части формулы (6), представляет собой разложение дельта-функции Дирака  $\frac{1}{\sin \theta} \delta(\theta - \theta_s) \delta(\phi - \phi_s)$

в ряд по сферическим функциям, что соответствует использованию в задаче (1)–(5) точечных зарядов для описания дипольного источника тока. Тогда  $\gamma$  – угол между радиальным лучем точки наблюдения и осью диполя.

Если  $N_s$  принимает конечное значение, то сумма (6) является частичной суммой ряда. Графики функции (6) приведены в работе [Денисов и Калинин, 2018]. Эта функция имеет максимум в точке  $\theta = \theta_s$ ,  $\phi = \phi_s$ , но знакопеременна, что затрудняет ее физическую интерпретацию. Решение задачи, полученное в приложении 1 данной статьи, а также асимптотические формулы приложения 2, справедливы при любом значении  $N_s$  в том числе и при  $N_s = \infty$ .

Для решения задачи (1)–(5) использовалось преобразование Лапласа по временной переменной [Лаврентьев и Шабат, 1973], применяя которое приходим к краевой задаче для уравнения:

$$\left(1 + \frac{p}{4\pi\sigma}\right) \left( \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta,\phi} \bar{\Phi} \right) + \frac{1}{H} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} = \frac{1}{\sigma} \operatorname{div} \bar{\mathbf{j}}^{ext} \quad (7)$$

с граничными условиями, аналогичными (2)–(4). Через  $\bar{\Phi}$ ,  $\bar{\mathbf{j}}^{ext}$  обозначены изображения функции  $\Phi$  и  $\mathbf{j}^{ext}$ . В шаровом слое  $r_0 < r < r_m$ , если  $|p| \ll \frac{2\pi\sigma_0 r_0}{H}$ , модули коэффициентов уравнения (7) мало отличаются от модулей коэффициентов уравнения:

$$\left(1 + \frac{p}{4\pi\sigma}\right) \left( \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r_0^2} \Delta_{\theta,\phi} \bar{\Phi} \right) + \frac{1}{H} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} = \frac{1}{\sigma} \operatorname{div} \bar{\mathbf{j}}^{ext}. \quad (8)$$

Поэтому при  $t \gg \frac{H}{2\pi\sigma_0 r_0}$  для исследования распределения электрического потенциала  $\Phi(r, \theta, \phi, t)$  можно воспользоваться оригиналом решения краевой задачи для уравнения (8) с граничными условиями, аналогичными (2)–(4).

Среди уравнений (8) можно выделить уравнение, соответствующее стационарному дипольному генератору, у которого сила тока не меняется с течением времени  $I_{s0}(t) = I_{s0}\vartheta(t)$ , а  $\bar{I}_{s0}(p) = I_{s0}/p$ . В случае нестационарного тока вида  $I_{s0}(t) = I_{s0}f(t)$ ,  $f(0) = 0$  в правой части уравнения (8) нужно заменить  $\frac{1}{p}$  функцией  $\bar{f}(p)$ . Решения краевых задач для этих уравнений отличаются только множителем, и знание оригинала для функции  $\bar{\Phi}$  позволяет записать решение задачи с нестационар-

ным током в виде свертки функций  $\Phi$  и  $f'(t)$ . В простейших случаях выбора вида функции  $f(t)$  решение задачи с нестационарным током имеет простой вид. Приведем несколько примеров.

1. Источник прекращает действовать в момент времени  $t = T$ , моделируется использованием функции  $f(t) = \vartheta(t) - \vartheta(t - T)$ . Тогда решение задачи с нестационарным источником (обозначаем  $\Phi^{(\text{нестац})}$ ) запишется в виде:

$$\Phi^{(\text{нестац})}(t) = \Phi(t) - \Phi(t - T)\vartheta(t - T). \quad (9)$$

2. Для мгновенного источника тока:

$$\begin{aligned} f(t) &= T\delta(t - T), \\ \Phi^{(\text{нестац})}(t) &= T \frac{\partial \Phi(t - T)}{\partial t} \vartheta(t - T). \end{aligned} \quad (10)$$

3. Если  $f(t) = 1 - e^{-t/T}$ , то

$$\Phi^{(\text{нестац})} = \frac{1}{T} \int_0^t \Phi(t') \exp\left(-\frac{(t-t')}{T}\right) dt'. \quad (11)$$

Эти формулы справедливы в любой фиксированной точке  $(r, \theta, \phi)$ , поэтому в формулах опущена зависимость функций от пространственных переменных. Во всех приведенных примерах решение задачи для дипольного генератора с нестационарным током выражается через решение задачи со стационарным током.

В данной статье решение краевой задачи для уравнения (8) со стационарным током найдено аналитически. Это позволяет в случае нестационарного тока примеров 1–3 также записать аналитическое решение, подставив решение со стационарным током в формулы (9), (10), (11) в соответствии с физикой задачи. Более того, в приложении 1 получено аналитическое выражение функции Грина краевой задачи для уравнения (8). Тогда с помощью формулы (10) можно записать решение, отличающееся от функции Грина соответствующей начально-краевой задачи только числовым множителем. Знание функции Грина позволяет представить решения начально-краевых задач для широкого класса нестационарных правых частей уравнения в виде свертки с функцией Грина.

В статье используются следующие обозначения: высота  $h = r - r_0$ ,  $\sigma_m = \sigma(r_m)$ ,  $\sigma_{s0} = \sigma(r_{s0})$ ,  $\sigma_{s1} = \sigma(r_{s1})$ ,  $Q_s = \frac{I_{s0}H}{r_0^2}$ ,  $V_{\infty,s} = \frac{Q_s}{4\pi\sigma_0} \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{s0}} - \frac{\sigma_0}{\sigma_{s1}} \right)$ .

Подробное аналитическое решение краевой задачи для уравнения (8) со стационарным током и нахождение оригинала приведено в приложении 1. Для решения задачи применяется метод разложения решения по сферическим функциям, коэффициенты разложения, зависящие от радиальной переменной, выражаются через гипергеометрические функции. Функция (10), в правую часть которой подставлено найденное в приложении 1 решение (П1.27) с  $N_s = \infty$ , отличается от функции Грина только множителем. Функция Грина является обобщенной функцией, и в работе найдено ее представление в виде суперпозиции двух рядов по полиномам Лежандра.

Стационарная модель токового диполя является одной из простейших моделей правой части уравнения, для которой получаются сходящиеся ряды в шаровом слое. Формулы (П1.34)–(П1.36) определяют распределение электрического потенциала  $\Phi(r, \theta, \phi, t)$  во всем шаровом слое  $r_0 < r < r_m$  при  $t \gg \frac{H}{2\pi\sigma_0 r_0}$ . Функция  $\Phi(r, \theta, \phi, t)$  зависит от большого числа параметров:  $H, r_0, \theta_s, \phi_s, h_{s0} = r_{s0} - r_0, h_{s1} = r_{s1} - r_0, h_m = r_m - r_0, N_s$ . В работе будем полагать, что  $h_{s0} = 5$  км,  $h_{s1} = 10$  км,  $h_m = 100$  км и оценивать влияние на потенциал только параметра  $N_s$ .

1. Если  $N_s = \infty$ , формулы (П1.35) – (П1.37), определяющие решение краевой задачи, представляют собой функциональные ряды, которые сходятся во всем шаровом слое, кроме точек расположения зарядов, но сходятся неравномерно и очень медленно. На рис. 1 приведен график стационарной части этого решения, нормированной на ионосферный потенциал, в зависимости от высоты  $h$  на радиальном луче расположения зарядов. Для построения графика проводились расчеты решения в нескольких точках интервалов  $(0, 4.5], [4.5, 9.5], [9.5, 10.5], [10.5, 20]$  оси  $h$  и использовалась линейная интерполяция. При этом для нахождения суммы ряда с точностью до первых двух значащих цифр приходится использовать частичные суммы ряда с  $N_s = 30000$ .

Численное исследование решения в нестационарном случае, при  $N_s = \infty$  по формулам (П1.35)–(П1.36) требует длительного счета и в статье проводится только в верхней части шарового слоя при больших значениях  $t$ . В приложении 2 при  $t \rightarrow \infty$  для потенциала  $\Phi(r, \theta, \phi, t)$  получена асимптотическая формула (П2.1), справедливая при любом значении  $N_s$ . Формула (П2.1) содержит только операцию суммирования и при  $N_s = \infty$  определяет асимптотику потенциала в любой точке шарового слоя, кроме точек расположения зарядов. На рис. 2 представлены графики стаци-

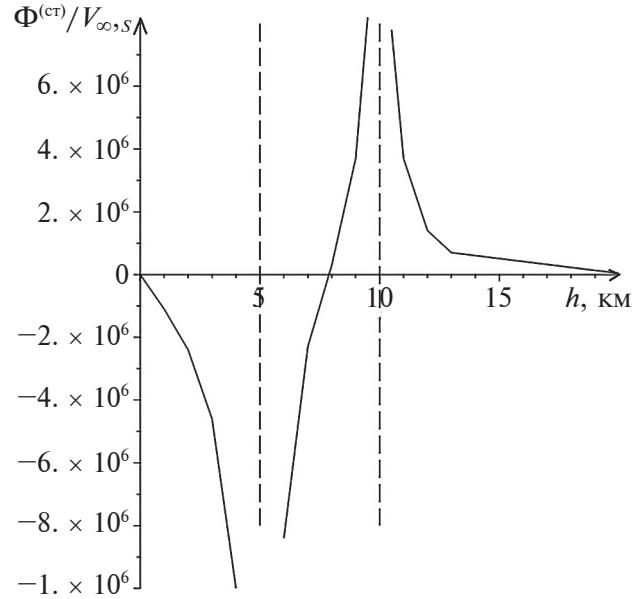


Рис. 1. График функции  $\Phi^{(\text{ст})} / V_{\infty,s}$  в зависимости от высоты  $h$ . Здесь  $h_m = 100$  км,  $\theta = \theta_s, \phi = \phi_s$ .

нарного решения  $\frac{\Phi^{(\text{ст})}}{V_{\infty,s}}$  (штриховая линия) и функции, стоящей в правой части асимптотической формулы (П2.1), также нормированной на  $V_{\infty,s}$  в зависимости от переменной  $\theta$  в момент времени  $t' = 4\pi\sigma_0 t = 2$  при фиксированных  $h$  и  $\phi$ . Для нахождения суммы ряда с точностью до десятых достаточно использовать  $N_s = 1000$ .

Левый график соответствует  $h = 70$  км, правый – верхней границе шарового слоя  $h = 100$  км.

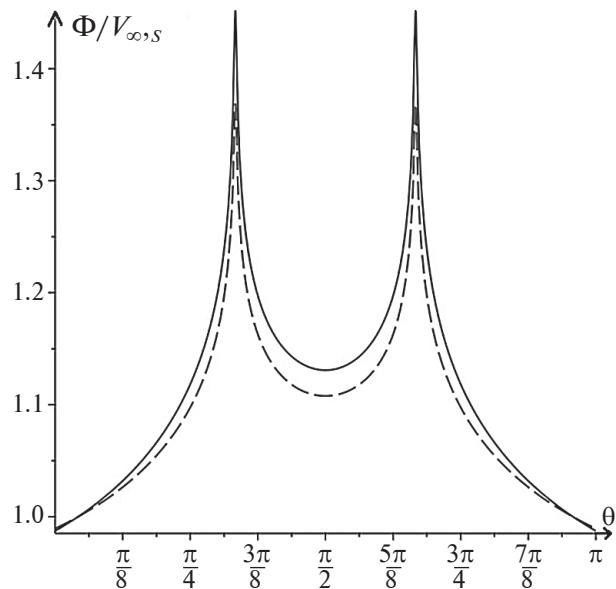
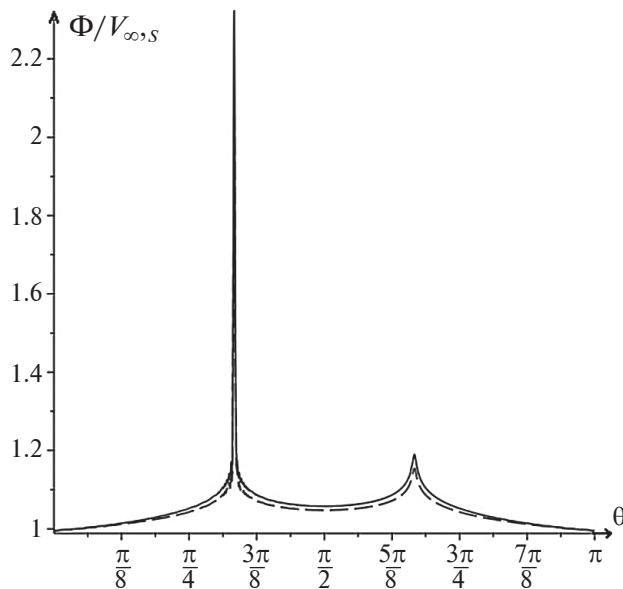
Правые графики рис. 2 симметричны относительно прямой  $\theta = \pi/2$ , что соответствует условию (2), максимальные значения представленных на рисунке функций соответственно равны 1.37 и 1.45. Численные расчеты показывают незначительное понижение значения потенциала по сравнению с ионосферным на геомагнитных полюсах. При  $t \rightarrow \infty$  в окрестности точек  $(h_m, \theta_s, \phi_s)$  и  $(h_m, \pi - \theta_s, \phi_s)$  нестационарное решение стремится к стационарному сверху, а в окрестности точек  $(h_m, 0, \phi_s)$  и  $(h_m, \pi, \phi_s)$  – снизу.

Проблема неравномерной сходимости ряда (П1.35), прежде всего, связана с точечностью зарядов рассматриваемого токового диполя.

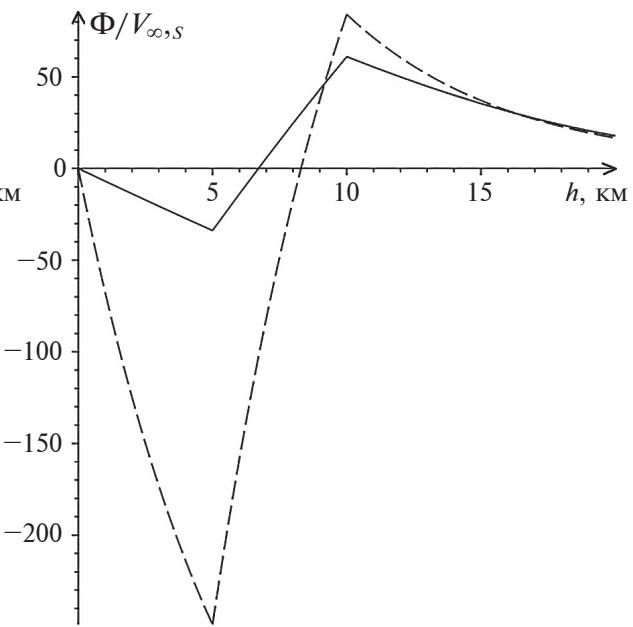
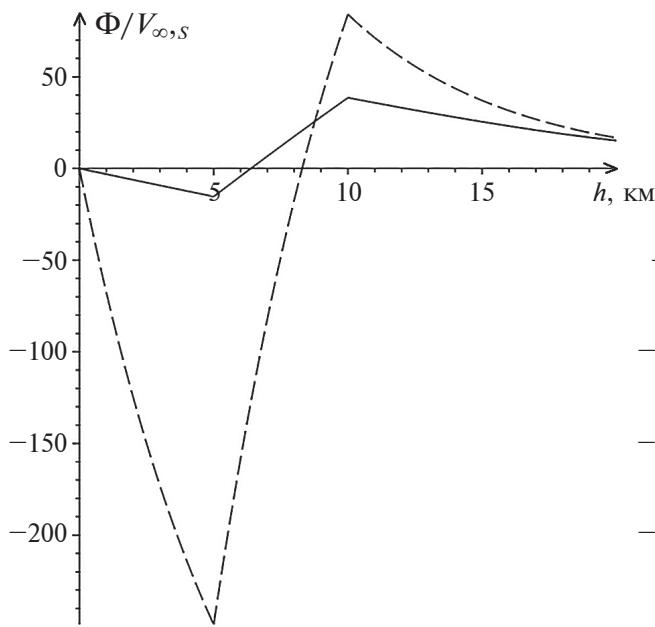
2. При любом заданном конечном значении  $N_s$  формулы (П1.35–П1.37) содержат лишь конечные суммы, что значительно сокращает длительность расчетов, исключает разрывы в точках расположения зарядов. Кроме того, это не просто частичные суммы решения для токового диполя с точеч-

ными зарядами, а и решение начально-краевой задачи со специальной правой частью. Поэтому графики, приведенные в этом пункте, дают качественную картинку изменения потенциала с течением времени.

В нестационарном случае все расчеты проведены для  $N_s = 20$ . На рис. 3 и рис. 4 штриховыми линиями изображен график стационарного решения задачи и приведены графики нестационарного решения задачи (1)–(5), нормированные



**Рис. 2.** Графики функции  $\Phi^{(ст)} / V_{\infty,s}$  (штриховая линия) и функции  $\Phi / V_{\infty,s}$  формулы (П2.1) в зависимости от угла  $\theta$  в фиксированный момент времени  $t' = 4\pi\sigma_0 t = 2$  при фиксированных  $h$ ,  $\Phi = \Phi_s$ ,  $\theta_s = \frac{\pi}{3}$ . Левый график соответствует  $h = 70$  км, правый  $h = 100$  км.



**Рис. 3.** Графики функций  $\Phi / V_{\infty,s}$  и  $\Phi^{(ст)}/V_{\infty,s}$  (шриховая линия) в фиксированный момент времени  $t' = 4\pi\sigma_0 t = 0.05$  (слева) и  $t' = 4\pi\sigma_0 t = 0.1$  (справа) в зависимости от высоты  $h$ .

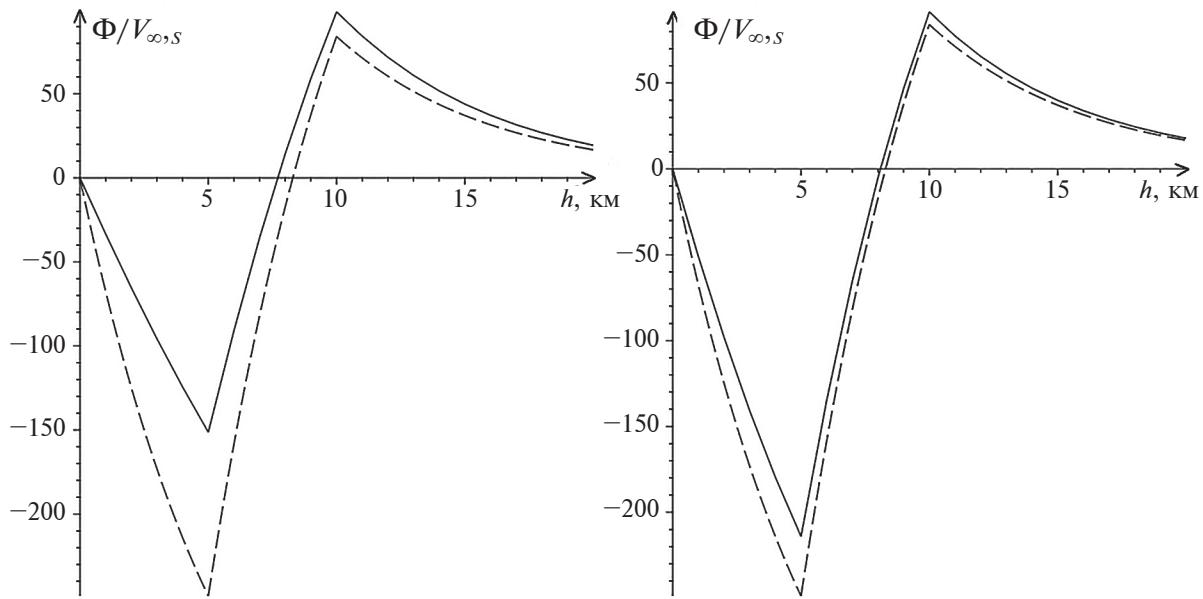


Рис. 4. Графики функций  $\Phi / V_{\infty,s}$  и  $\Phi^{(\text{ст})} / V_{\infty,s}$  (штриховая линия) в фиксированный момент времени  $t' = 4\pi\sigma_0 t = 0.5$  (слева) и  $t' = 4\pi\sigma_0 t = 1$  (справа) в зависимости от высоты  $h$ .

на ионосферный потенциал, в зависимости от высоты  $h$  на радиальном луче расположения зарядов в различные моменты времени в нижней атмосфере. Построенные графики показывают монотонное изменение функции  $\Phi/V_{\infty,s}$  с течением времени в окрестности  $h = 5$  км и немонотонное в окрестности  $h = 10$  км. Уже для  $t' = 4\pi\sigma_0 t = 1$  решение  $\Phi/V_{\infty,s}$  мало отличается от стационарного  $\Phi^{(\text{ст})}/V_{\infty,s}$ , причем наибольшие отличия в окрестности точки  $h = 5$  км.

#### 4. ПРИЛОЖЕНИЕ 1. РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В приложении приведено решение краевой задачи для уравнения:

$$\left(1 + \frac{p}{4\pi\sigma}\right) \left( \frac{\partial^2 \overline{\Phi}_{s0}}{\partial r^2} + \frac{1}{r_0^2} \Delta_{\theta,\varphi} \overline{\Phi}_{s0} \right) + \frac{1}{H} \frac{\partial \overline{\Phi}_{s0}}{\partial r} = \\ = \frac{Q_s}{\sigma p H \sin \theta} \delta_{N_s}(\theta, \theta_s, \varphi, \varphi_s) \delta(r - r_{s0}) \quad (\text{П1.1})$$

с граничными условиями, аналогичными (2)–(4) ( $Q_s = \frac{I_{s0} H}{r_0^2}$ ). Решение краевой задачи для уравнения (8) записывается в виде:

$$\bar{\Phi} = \overline{\Phi}_{s0} - \overline{\Phi}_{s1}. \quad (\text{П1.2})$$

Если  $N_s = \infty$ , решение уравнения (П1.1) с условиями (2)–(4) отличается от функции Грина только множителем.

В уравнении (П1.1) и граничных условиях, аналогичных (2)–(4), сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_0 \exp\left(\frac{r - r_0}{H}\right) \\ \mu = \cos \theta \end{cases}$$

и сформулируем краевую задачу в области  $\sigma_0 < \sigma < \sigma_m$ :

$$\sigma^2 \frac{\partial^2 \overline{\Phi}_{s0}}{\partial \sigma^2} + \sigma \frac{(8\pi\sigma + p)}{(4\pi\sigma + p)} \frac{\partial \overline{\Phi}_{s0}}{\partial \sigma} + \frac{H^2}{r_0^2} \Delta_{\mu,\varphi} \overline{\Phi}_{s0} = \\ = \frac{4\pi\sigma Q_s}{p(4\pi\sigma + p)} \delta(\sigma - \sigma_{s0}) \delta_{N_s}(\mu, \mu_s, \varphi, \varphi_s), \quad (\text{П1.3})$$

$$\overline{\Phi}_{s0}(\sigma_m, \mu, \varphi, p) = \overline{\Phi}_{s0}(\sigma_m, -\mu, \varphi, p), \quad (\text{П1.4})$$

$$\frac{\partial \overline{\Phi}_{s0}}{\partial \sigma}(\sigma_m, \mu, \varphi, p) = -\frac{\partial \overline{\Phi}_{s0}}{\partial \sigma}(\sigma_m, -\mu, \varphi, p), \quad (\text{П1.5})$$

$$\overline{\Phi}_{s0}(\sigma_0, \mu, \varphi, p) = 0. \quad (\text{П1.6})$$

Здесь  $\sigma_m = \sigma(r_m)$ ,  $\mu_s = \cos \theta_s$ .

Решение задачи представим в виде ряда по сферическим функциям

$$\overline{\Phi_{s0}} = \overline{A_{00}}(\sigma, p) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left( \overline{A_{nk}}(\sigma, p) Y_{n,k}^{(1)}(\mu, \varphi) + \overline{B_{nk}}(\sigma, p) Y_{n,k}^{(2)}(\mu, \varphi) \right). \quad (\text{П1.7})$$

Функция, представляемая рядом (П1.7), является решением уравнения (П1.3), если коэффи-

циенты  $\overline{A_{nk}}(\sigma, p)$  удовлетворяют неоднородному уравнению:

---


$$\sigma^2 \frac{\partial^2 \overline{A_{nk}}}{\partial \sigma^2} + \sigma \frac{(8\pi\sigma + p)}{(4\pi\sigma + p)} \frac{\partial \overline{A_{nk}}}{\partial \sigma} - \frac{n(n+1)H^2}{r_0^2} \overline{A_{nk}} = \frac{4\pi\sigma Q_s}{p(4\pi\sigma + p)} \frac{Y_{nk}^{(1)}(\mu_s, \varphi_s)}{Y_{n,k}^{(2)}} \delta(\sigma - \sigma_{s0}), \quad 0 \leq n \leq N_s, \quad (\text{П1.8})$$


---

для  $0 \leq n \leq N_s$  и соответствующему однородному уравнению, если  $n > N_s$ . Из условия (П1.6) следует условие

$$\overline{A_{nk}}(\sigma_0, p) = 0. \quad (\text{П1.9})$$

Условиям (П1.4–П1.5), учитывающим связь электрических полей в магнито-сопряженных точках на верхней границе атмосферы, соответствуют условия:

$$\overline{A_{nk}}(\sigma_m, p) = 0, \text{ если } n+k = \text{нечетное число}, \quad (\text{П1.10})$$

$$\frac{\partial \overline{A_{nk}}}{\partial \sigma}(\sigma_m, p) = 0, \text{ если } n+k = \text{четное число}. \quad (\text{П1.11})$$

Аналогичные краевые задачи получаются для функций  $\overline{B_{nk}}(\sigma, p)$ , только в правой части уравнения (П1.8) будет стоять сферическая функция с верхним индексом 2. Для  $n > N_s$  в силу однородности уравнения и однородности граничных условий, все коэффициенты  $\overline{A_{nk}}(\sigma, p)$  и  $\overline{B_{nk}}(\sigma, p)$  равны нулю.

Если  $\left| \frac{p}{4\pi\sigma} \right| < 1$ , однородное уравнение, соответствующее (П1.8), имеет два линейно-независимых решения, которые выражаются через гипергеометрические функции [Градштейн и Рыжик, 1963]:

$$\begin{aligned} \overline{A}_{nk}^{(1,\text{одн})}(\sigma, p) &= \left( -\frac{p}{4\pi\sigma} \right)^{\frac{1+\xi_n}{2}} F\left( \alpha_n, \beta_n, \alpha_n + \beta_n, -\frac{p}{4\pi\sigma} \right), \\ \overline{A}_{nk}^{(2,\text{одн})}(\sigma, p) &= \left( -\frac{p}{4\pi\sigma} \right)^{\frac{1-\xi_n}{2}} F\left( 1 - \alpha_n, 1 - \beta_n, 2 - \alpha_n - \beta_n, -\frac{p}{4\pi\sigma} \right). \end{aligned} \quad (\text{П1.12})$$

Здесь

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \left( 1 + \xi_n - \sqrt{\xi_n^2 - 1} \right), \quad \beta_n = \frac{1}{2} \left( 1 + \xi_n + \sqrt{\xi_n^2 - 1} \right), \quad (\text{П1.12})$$

где  $\xi_n = \sqrt{1 + \frac{4n(n+1)H^2}{r_0^2}}$ . При нахождении решения неоднородного уравнения (П1.8) с условиями (П1.9–П1.11) можно воспользоваться последней формулой пункта 24.2 справочника [Камке, 1976], а затем свойствами дельта-функции. Формула получается методом вариации произвольных постоянных и содержит вронскиан решений однородного уравнения. Для вычисления вронскиана функций (П1.12) используются производные от гипергеометрических функций. Чтобы сократить записи используемых

в данной работе гипергеометрических функций введем обозначения:

$$\begin{aligned} F_n^{(1)}(x) &= F(\alpha_n, \beta_n, \alpha_n + \beta_n, x), \\ F_n^{(2)}(x) &= F(1 - \alpha_n, 1 - \beta_n, 2 - \alpha_n - \beta_n, x), \\ F_n^{(3)}(x) &= F(\alpha_n + 1, \beta_n + 1, \alpha_n + \beta_n + 1, x), \\ F_n^{(4)}(x) &= F(2 - \alpha_n, 2 - \beta_n, 3 - \alpha_n - \beta_n, x). \end{aligned}$$

Функции с номерами 3, 4 появляются при дифференцировании  $F_n^{(1)}, F_n^{(2)}$  по независимой переменной  $x$ .

В зависимости от того, каким является число  $n + k$ , четным или нечетным, для решений крае-

$$\overline{A_{nk}}(\sigma, p) = \begin{cases} \frac{Y_{n,k}^{(1)}(\mu_s, \varphi_s)}{Y_{n,k}^2} \bar{\tilde{R}}_n(\sigma, p), & \text{если } n+k - \text{четное число} \\ \frac{Y_{n,k}^{(1)}(\mu_s, \varphi_s)}{Y_{n,k}^2} \tilde{\bar{R}}_n(\sigma, p), & \text{если } n+k - \text{нечетное число} \end{cases} \quad (\text{П1.13})$$


---

Функция  $\bar{\tilde{R}}_n(\sigma, \sigma_{s0}, p)$  записывается с помощью формул

$$\bar{\tilde{R}}_n(\sigma, \sigma_{s0}, p) = \begin{cases} \frac{Q_s}{p\xi_n\sqrt{\sigma\sigma_{s0}}} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{s0}}\right)^{\frac{\xi_n}{2}} \frac{\tilde{V}_n\left(-\frac{p}{4\pi\sigma_{s0}}, -\frac{p}{4\pi\sigma_m}\right) I_n\left(-\frac{p}{4\pi\sigma_0}, -\frac{p}{4\pi\sigma}\right)}{\tilde{V}_n\left(-\frac{p}{4\pi\sigma_0}, -\frac{p}{4\pi\sigma_m}\right)}, & \sigma_0 < \sigma < \sigma_{s0} \\ \frac{Q_s}{p\xi_n\sqrt{\sigma\sigma_{s0}}} \left(\frac{\sigma_{s0}}{\sigma}\right)^{\frac{\xi_n}{2}} \frac{\tilde{V}_n\left(-\frac{p}{4\pi\sigma}, -\frac{p}{4\pi\sigma_m}\right) I_n\left(-\frac{p}{4\pi\sigma_0}, -\frac{p}{4\pi\sigma_{s0}}\right)}{\tilde{V}_n\left(-\frac{p}{4\pi\sigma_0}, -\frac{p}{4\pi\sigma_m}\right)}, & \sigma_{s0} < \sigma < \sigma_m \end{cases}, \quad (\text{П1.14})$$

где

$$I_n(x_1, x_2) = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\xi_n} F_n^{(1)}(x_2) F_n^{(2)}(x_1) - F_n^{(1)}(x_1) F_n^{(2)}(x_2), \quad (\text{П1.15})$$

$$\tilde{V}_n(x_1, x_2) = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\xi_n} \tilde{\phi}_n^{(1)}(x_2) F_n^{(2)}(x_1) + F_n^{(1)}(x_1) \tilde{\phi}_n^{(2)}(x_2). \quad (\text{П1.16})$$


---

Здесь

$$\tilde{\phi}_n^{(2)}(x) = \frac{\xi_n - 1}{\xi_n + 1} F_n^{(2)}(x) - \frac{x}{(1 + \xi_n)} F_n^{(4)}(x), \quad (\text{П1.17})$$

$$\tilde{\phi}_n^{(1)}(x) = F_n^{(1)}(x) + \frac{x}{(1 + \xi_n)} F_n^{(3)}(x). \quad (\text{П1.18})$$

Для функции  $\bar{\tilde{R}}_n(\sigma, \sigma_{s0}, p)$  получается выражение, аналогичное (П1.14–П1.16), только в этих формулах над функциями, имеющими в обозначениях одну волну, следует поставить две волны и учесть, что формулы, определяющие функции  $\tilde{\phi}_n^{(2)}(x), \tilde{\phi}_n^{(1)}(x)$ , другие:

$$\tilde{\phi}_n^{(2)}(x) = -F_n^{(2)}(x), \quad \tilde{\phi}_n^{(1)}(x) = F_n^{(1)}(x). \quad (\text{П1.19})$$

Коэффициент  $\overline{B_{nk}}(\sigma, p)$  имеет вид (П1.13), только в качестве множителя перед  $\bar{\tilde{R}}_n(\sigma, p)$  используется сферическая функция с верхним индексом 2.

Так как функция (П1.14) симметрична по переменным  $\sigma, \sigma_{s0}$ , то удобно ввести параметр  $\sigma_{s0}$  в аргументы функций  $\overline{\Phi}_{s0}, \overline{A_{nk}}, \overline{B_{nk}}, \bar{\tilde{R}}_n, \tilde{\bar{R}}_n$  и использовать обозначения, в которых важен порядок следования этих переменных, например,

$$\overline{\Phi}_{s0} = \begin{cases} \bar{\Phi}(\sigma, \sigma_{s0}, \mu, \varphi, p), & \text{если } \sigma_0 < \sigma < \sigma_{s0} \\ \bar{\Phi}(\sigma_{s0}, \sigma, \mu, \varphi, p), & \text{если } \sigma_{s0} < \sigma < \sigma_m \end{cases}$$

и рассматривать только случай  $\sigma_0 < \sigma < \sigma_{s0}$ . Если в решении, найденном для  $\sigma_0 < \sigma < \sigma_{s0}$ , заменить первый аргумент  $\sigma$  на  $\sigma_{s0}$  и второй аргумент  $\sigma_{s0}$  на  $\sigma$ , получим решение в области  $\sigma_{s0} < \sigma < \sigma_m$ .

После подстановки  $\overline{A_{nk}}(\sigma, \sigma_{s0}, p), \overline{B_{nk}}(\sigma, \sigma_{s0}, p)$  в ряд (П1.7) внутреннюю сумму по  $k$ , при каждом фиксированном  $n$ , разобьем на две суммы в зависимости от того, каким является число  $n + k$ , чет-

ным или нечетным [Денисова и Калинин, 2018]. Тогда воспользовавшись теоремой о сложении присоединенных функций Лежандра, будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} = & \overline{A_{00}}(\sigma, \sigma_{s0}, p) + \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(2n+1)}{8\pi} \left\{ \left( \bar{R}_n(\sigma, \sigma_{s0}, p) + \bar{\tilde{R}}_n(\sigma, \sigma_{s0}, p) \right) P_n(\cos\gamma) + \right. \\ & \left. + \left( \bar{R}_n(\sigma, \sigma_{s0}, p) - \bar{\tilde{R}}_n(\sigma, \sigma_{s0}, p) \right) P_n(\cos\gamma_1) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П1.20})$$

Здесь

$$\cos\gamma_1 = -\mu\mu_s + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_s^2} \cos(\phi - \phi_s),$$

где  $\gamma_1$  — угол между радиальным лучом, направленным в точку наблюдения, и радиальным лучом, содержащим точки, сопряженные точкам расположения зарядов диполя.

Для нахождения обратного преобразования Лапласа функции  $\bar{\Phi}(\sigma, \sigma_{s0}, \mu, \phi, p)$  нужно найти обратное преобразование функций  $\overline{A_{00}}(\sigma, \sigma_{s0}, p), \bar{R}_n(\sigma, \sigma_{s0}, p), \bar{\tilde{R}}_n(\sigma, \sigma_{s0}, p)$ . Рассмотрим сначала функцию  $\bar{R}_n(\sigma, \sigma_{s0}, p)$ . Эта функция определяется формулой (П1.14), если  $\left| \frac{p}{4\pi\sigma_0} \right| < 1$ ,

и может быть продолжена в комплексную плоскость  $p = p' + ip''$ , так как в комплексную плоскость можно продолжить все гипергеометрические функции, входящие в формулу (П1.14). Учитывая особые точки этих гипергеометрических функций, будем использовать замкнутый контур С в комплексной плоскости  $p = p' + ip''$ , изображенный на рис. 5. Контур обходит особые точки функции  $\bar{R}_n(\sigma, \sigma_{s0}, p)$ . Эти точки расположены на отрицательной части вещественной оси  $p'$  и имеют координаты:  $-4\pi\sigma_m, -4\pi\sigma_{s0}, -4\pi\sigma, -4\pi\sigma_0$ . Внутри контура С подынтегральная функция имеет полюс первого порядка в точке  $p = 0$ , поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \bar{R}_n(\sigma, \sigma_{s0}, p) \exp(pt) dp = \operatorname{res}_{p=0} \left( \bar{R}_n(\sigma, \sigma_{s0}, p) \exp(pt) \right). \quad (\text{П1.21})$$

Обозначим этот вычет через  $\tilde{R}_n^{(\text{стан})}(\sigma, \sigma_{s0})$ . Учитывая, что гипергеометрические функции

при  $p = 0$  равны 1, получим

$$\tilde{R}_n^{(\text{стан})}(\sigma, \sigma_{s0}) = \frac{Q_s}{\xi_n \sqrt{\sigma\sigma_{s0}}} \left( \frac{\sigma}{\sigma_{s0}} \right)^{\frac{\xi_n}{2}} \frac{\left( \left( \frac{\sigma_{s0}}{\sigma_m} \right)^{\xi_n} + \frac{\xi_n - 1}{\xi_n + 1} \right) \left( \left( \frac{\sigma_0}{\sigma} \right)^{\xi_n} - 1 \right)}{\left( \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_m} \right)^{\xi_n} + \frac{\xi_n - 1}{\xi_n + 1} \right)}. \quad (\text{П1.22})$$

Для продолжения гипергеометрических функций  $F_n^{(i)}(z)$  за внешность единичного круга комплексной плоскости  $z$  с разрезом вдоль вещественной оси от 1 до  $\infty$  использовалась формула [Градштейн и Рыжик, 1963, ф. 9.132(2)]. В соответствии с этой формулой функция  $\bar{R}_n(\sigma, \sigma_{s0}, p)$  на верхнем и нижнем берегах разреза вдоль отри-

цательной части вещественной оси принимает комплексно-сопряженные значения. Контур рис. 5 построен с учетом сложных аргументов гипергеометрических функций, определяющих  $\bar{R}_n(\sigma, \sigma_{s0}, p)$ . Устремляя в формуле (П1.21) радиус большой окружности к  $\infty$ , а радиусы маленьких полуокружностей к нулю, получим

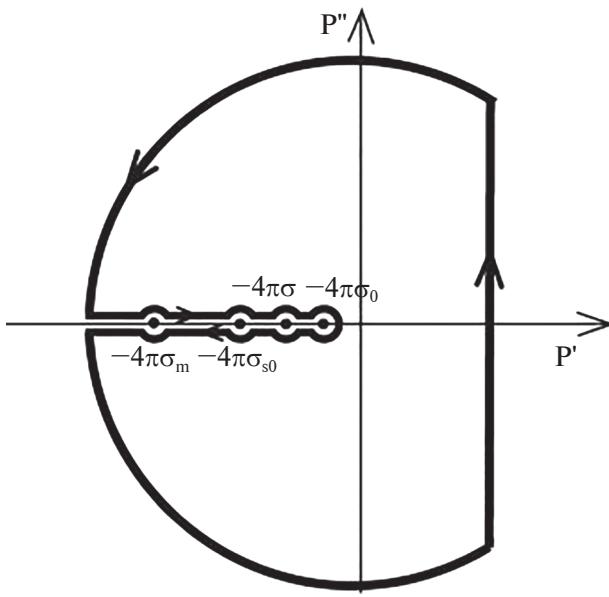


Рис. 5. Контур интегрирования для нахождения оригинала функции  $\bar{\tilde{R}}_n(\sigma, \sigma_{s0}, p)$ .

$$\tilde{R}_n(\sigma, \sigma_{s0}, t) = \tilde{R}_n^{(\text{стап})}(\sigma, \sigma_{s0}) - \frac{1}{\pi} \int_{-4\pi\sigma_m}^{-4\pi\sigma_0} \text{Im } \bar{\tilde{R}}_n(\sigma, \sigma_{s0}, p) \exp(p \cdot t) dp. \quad (\text{П1.23})$$

Так как для нахождения  $\text{Im } \bar{\tilde{R}}_n$  на верхнем бегу разреза при  $-4\pi\sigma_m < p' < -4\pi\sigma_0$  использовались формулы продолжения гипергеометрических функций  $F_n^{(1)}(z), F_n^{(2)}(z)$  за единичный круг [Градштейн и Рыжик, 1963, ф. 9.132(2)], то появляются еще две гипергеометрические функции:

$$\begin{aligned} F_n^{(5)}(x) &= F(\alpha_n, 1 - \beta_n, 1 + \alpha_n - \beta_n, x), \\ F_n^{(6)}(x) &= F(1 - \alpha_n, \beta_n, 1 - \alpha_n + \beta_n, x). \end{aligned}$$

В интеграле выполним замену переменной интегрирования:  $\eta = -\frac{p'}{4\pi\sigma_0}$ , выделим у функции  $\text{Im } \bar{\tilde{R}}_n(\sigma, \sigma_{s0}, -4\pi\sigma_0\eta)$  постоянный множитель и введем новую функцию

$$\text{Im } \bar{\tilde{R}}_n(\sigma, \sigma_{s0}, -4\pi\sigma_0\eta) = -\frac{Q_s}{4\sigma_0^2} \tilde{C}_n(\sigma, \sigma_{s0}, \eta).$$

В результате функцию  $\tilde{R}_n(\sigma, \sigma_{s0}, t)$  перепишем в виде

---


$$\tilde{R}_n(\sigma, \sigma_{s0}, t) = \tilde{R}_n^{(\text{стап})}(\sigma, \sigma_{s0}) + \frac{Q_s}{\sigma_0} \int_1^{\sigma_m/\sigma_0} \tilde{C}_n(\sigma, \sigma_{s0}, \eta) \exp(-4\pi\sigma_0 t \eta) d\eta. \quad (1.24)$$


---

Учитывая особые точки функции  $\bar{\tilde{R}}_n$ , промежуток интегрирования  $(1, \sigma_m/\sigma_0)$  в формуле (П1.24) разделим на три части, в каждой из которых для функции  $\tilde{C}_n(\sigma, \sigma_{s0}, \eta)$  получим свое аналитическое выражение. Будем использовать следующие обозначения:

$$\tilde{C}_n(\sigma, \sigma_{s0}, \eta) = \begin{cases} \tilde{C}_n^{(1)}, & \eta \in (1, \sigma/\sigma_0) \\ \tilde{C}_n^{(2)}, & \eta \in (\sigma/\sigma_0, \sigma_{s0}/\sigma_0), \\ \tilde{C}_n^{(3)}, & \eta \in (\sigma_{s0}/\sigma_0, \sigma_m/\sigma_0) \end{cases}, \quad (\text{П1.25})$$

где

$$\tilde{C}_n^{(1)}(\sigma, \sigma_{s0}, \eta) = \frac{\left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{\sigma\sigma_{s0}}}\right)^{\xi_n+1} \eta^{\xi_n-1} L_n^2\left(\frac{1}{\eta}\right) \tilde{V}_n\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\eta, \frac{\sigma_0}{\sigma_m}\eta\right) \tilde{V}_n\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{s0}}\eta, \frac{\sigma_0}{\sigma_m}\eta\right)}{\left|\tilde{V}_n\left(\eta, \frac{\sigma_0}{\sigma_m}\eta\right)\right|^2},$$

$$\tilde{C}_n^{(2)}(\sigma, \sigma_{s0}, \eta) = -\frac{\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma_{s0}}}\right)^{\xi_n+1} L_n\left(\frac{1}{\eta}\right) M_n\left(\frac{1}{\eta}, \frac{\sigma}{\sigma_0\eta}\right) \tilde{V}_n\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{s0}}\eta, \frac{\sigma_0}{\sigma_m}\eta\right) \tilde{W}_n\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_m}\eta\right)}{\eta^2 \left|\tilde{V}_n\left(\eta, \frac{\sigma_0}{\sigma_m}\eta\right)\right|^2},$$

$$\tilde{C}_n^{(3)}(\sigma, \sigma_{s0}, \eta) = \frac{\left(\frac{\sqrt{\sigma\sigma_{s0}}}{\sigma_0}\right)^{\xi_n+1} M_n\left(\frac{1}{\eta}, \frac{\sigma_{s0}}{\sigma_0\eta}\right) M_n\left(\frac{1}{\eta}, \frac{\sigma}{\sigma_0\eta}\right) \tilde{W}_n^2\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_m}\eta\right)}{\eta^{\xi_n+3} \left|\tilde{V}_n\left(\eta, \frac{\sigma_0}{\sigma_m}\eta\right)\right|^2}.$$

Здесь

$$M_n(x_1, x_2) = \frac{1}{\beta_n - \alpha_n} \left( \left( \frac{x_1}{x_2} \right)^{\alpha_n} F_n^{(3)}(x_1) F_n^{(4)}(x_2) - \left( \frac{x_1}{x_2} \right)^{\beta_n} F_n^{(3)}(x_2) F_n^{(4)}(x_1) \right),$$

$$L_n(x) = \frac{\delta_n^{(1)} \Gamma(1 - \alpha_n + \beta_n)}{\Gamma(2 - \alpha_n) \Gamma(\beta_n)} x^{\alpha_n} F_n^{(3)}(x) - \frac{\delta_n^{(2)} \Gamma(1 + \alpha_n - \beta_n)}{\Gamma(\alpha_n) \Gamma(2 - \beta_n)} x^{\beta_n} F_n^{(4)}(x),$$

$$\tilde{W}_n(x) = \frac{\Gamma(3 - \alpha_n - \beta_n)}{2\Gamma(2 - \alpha_n) \Gamma(2 - \beta_n)} x^{\xi_n} \tilde{\phi}_n^{(1)}(x) + \frac{\Gamma(\alpha_n + \beta_n)}{\Gamma(\alpha_n) \Gamma(\beta_n)} \tilde{\phi}_n^{(2)}(x),$$

$$\delta_n^{(1,2)} = \frac{1}{2} \left( \pm 1 - \sqrt{\frac{\xi_n - 1}{\xi_n + 1}} \right).$$

Функция  $\tilde{R}_n(\sigma, \sigma_{s0}, t)$  представляется по формуле, аналогичной (П1.24), только все буквы с од-

ной волной следует заменить на буквы с двумя волнами. При этом функция  $\tilde{R}_n^{(\text{сташ})}$  имеет вид:

---


$$\tilde{R}_n^{(\text{сташ})}(\sigma, \sigma_{s0}) = \frac{Q_s}{\xi_n \sqrt{\sigma\sigma_{s0}}} \left( \frac{\sigma}{\sigma_{s0}} \right)^{\frac{\xi_n}{2}} \frac{\left( \left( \frac{\sigma_{s0}}{\sigma_m} \right)^{\xi_n} - 1 \right) \left( \left( \frac{\sigma_0}{\sigma} \right)^{\xi_n} - 1 \right)}{\left( \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_m} \right)^{\xi_n} - 1 \right)}. \quad (\text{П1.26})$$


---

Для нахождения коэффициента  $\overline{A_{00}}(\sigma, \sigma_{s0}, p)$  не требуются специальные функции и, возвраща-

$$A_{00}(\sigma, \sigma_{s0}, t) = \frac{Q_s}{4\pi} \left( \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma_0} \right) + \frac{Q_s}{4\pi\sigma_0} \int_1^{\sigma/\sigma_0} \frac{1}{\eta^2} e^{-4\pi\sigma_0 t \eta} d\eta. \quad \sigma_0 < \sigma < \sigma_{s0}$$

Учитывая (П1.24), после перегруппировки слагаемых решение (П1.20) запишем в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma, \sigma_{s0}, \mu, \phi, t) &= \Phi^{(\text{стаци})}(\sigma, \sigma_{s0}, \mu, \phi) + \frac{Q_s}{4\pi\sigma_0} \int_1^{\sigma/\sigma_0} \frac{1}{\eta^2} e^{-4\pi\sigma_0 t \eta} d\eta + \\ &+ \sum_{n=1}^{N_s} (2n+1) (P_n(\cos \gamma) B_n(\sigma, \sigma_{s0}, t) + P_n(\cos \gamma_1) D_n(\sigma, \sigma_{s0}, t)). \end{aligned} \quad (\text{П1.27})$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi^{(\text{стаци})}(\sigma, \sigma_{s0}, \mu, \phi) &= \frac{Q_s}{4\pi} \left( \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma_0} \right) + \sum_{n=1}^{N_s} \frac{(2n+1)}{4\pi} \left\{ R_n^{(\text{стаци})}(\sigma, \sigma_{s0}) P_n(\cos \gamma) + \right. \\ &\quad \left. + T_n^{(\text{стаци})}(\sigma, \sigma_{s0}) P_n(\cos \gamma_1) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{П1.28})$$

$$R_n^{(\text{стаци})}(\sigma, \sigma_{s0}) = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{R}_n^{(\text{стаци})}(\sigma, \sigma_{s0}) + \tilde{\tilde{R}}_n^{(\text{стаци})}(\sigma, \sigma_{s0}) \right\}, \quad (\text{П1.29})$$

$$T_n^{(\text{стаци})}(\sigma, \sigma_{s0}) = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{R}_n^{(\text{стаци})}(\sigma, \sigma_{s0}) - \tilde{\tilde{R}}_n^{(\text{стаци})}(\sigma, \sigma_{s0}) \right\}, \quad (\text{П1.30})$$

$$\bar{B}_n(\sigma, \sigma_{s0}, \eta) = \frac{Q_s}{8\pi\sigma_0} \left\{ \tilde{C}_n(\sigma, \sigma_{s0}, \eta) + \tilde{\tilde{C}}_n(\sigma, \sigma_{s0}, \eta) \right\}, \quad (\text{П1.31})$$

$$\bar{D}_n(\sigma, \sigma_{s0}, \eta) = \frac{Q_s}{8\pi\sigma_0} \left\{ \tilde{C}_n(\sigma, \sigma_{s0}, \eta) - \tilde{\tilde{C}}_n(\sigma, \sigma_{s0}, \eta) \right\}, \quad (\text{П1.32})$$

$$B_n(\sigma, \sigma_{s0}, t) = \int_1^{\sigma_m/\sigma_0} \bar{B}_n(\sigma, \sigma_{s0}, \eta) e^{-4\pi\sigma_0 t \eta} d\eta, \quad (\text{П1.33})$$

$$D_n(\sigma, \sigma_{s0}, t) = \int_1^{\sigma_m/\sigma_0} \bar{D}_n(\sigma, \sigma_{s0}, \eta) e^{-4\pi\sigma_0 t \eta} d\eta. \quad (\text{П1.34})$$

Все функции (П1.27)–(П1.34) записаны для случая  $\sigma_0 < \sigma < \sigma_{s0}$ . Если  $\sigma_{s0} < \sigma < \sigma_m$  в правой части формул (П1.27)–(П1.33) следует поменять местами  $\sigma$  и  $\sigma_{s0}$ .

Если  $N_s = \infty$ , уравнение (П1.1) отличается от уравнения для функции Грина только множителем. Поэтому, подставляя решение (П1.27) в фор-

мулу (10), получим, с точностью до множителя, функцию Грина начально-краевой задачи для уравнения, соответствующего (8).

Ниже запишем решение задачи для стационарного токового диполя. Заменяя в формулах (П1.27)–(П1.34)  $\sigma_{s0}$  на  $\sigma_{s1}$ , в соответствии с формулой (П1.2) получим:

$$\begin{aligned} \Phi_s(\sigma, \mu, \varphi, t) = & \Phi^{(\text{стаци})}(\sigma, \sigma_{s0}, \mu, \varphi) - \Phi^{(\text{стаци})}(\sigma, \sigma_{s1}, \mu, \varphi) + \\ & + \sum_{n=1}^{N_s} (2n+1) \left\{ P_n(\cos \gamma) (B_n(\sigma, \sigma_{s0}, t) - B_n(\sigma, \sigma_{s1}, t)) + \right. \\ & \left. + P_n(\cos \gamma_1) (D_n(\sigma, \sigma_{s0}, t) - D_n(\sigma, \sigma_{s1}, t)) \right\} \end{aligned} \quad (\text{П1.35})$$

в области  $\sigma_0 < \sigma < \sigma_{s0}$ .

В области  $\sigma_{s0} < \sigma < \sigma_{s1}$  временной вклад дает и слагаемое, соответствующее  $n = 0$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_s(\sigma, \mu, \varphi, t) = & \Phi^{(\text{стаци})}(\sigma_{s0}, \sigma, \mu, \varphi) - \Phi^{(\text{стаци})}(\sigma, \sigma_{s1}, \mu, \varphi) - \frac{Q_s}{4\pi\sigma_0} \int_{\frac{\sigma_{s0}}{\sigma_0}}^{\frac{\sigma}{\sigma_0}} \frac{1}{\eta^2} e^{-4\pi\sigma_0 t \eta} d\eta + \\ & + \sum_{n=1}^{N_s} (2n+1) \left\{ P_n(\cos \gamma) (B_n(\sigma_{s0}, \sigma, t) - B_n(\sigma, \sigma_{s1}, t)) + P_n(\cos \gamma_1) (D_n(\sigma_{s0}, \sigma, t) - D_n(\sigma, \sigma_{s1}, t)) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П1.36})$$

В области  $\sigma_{s1} < \sigma < \sigma_m$  получим

$$\begin{aligned} \Phi_s(\sigma, \mu, \varphi, t) = & \Phi^{(\text{стаци})}(\sigma_{s0}, \sigma, \mu, \varphi) - \Phi^{(\text{стаци})}(\sigma_{s1}, \sigma, \mu, \varphi) - \frac{Q_s}{4\pi\sigma_0} \int_{\frac{\sigma_{s0}}{\sigma_0}}^{\frac{\sigma_{s1}}{\sigma_0}} \frac{1}{\eta^2} e^{-4\pi\sigma_0 t \eta} d\eta + \\ & + \sum_{n=1}^{N_s} (2n+1) \left\{ P_n(\cos \gamma) (B_n(\sigma_{s0}, \sigma, t) - B_n(\sigma_{s1}, \sigma, t)) + P_n(\cos \gamma_1) (D_n(\sigma_{s0}, \sigma, t) - D_n(\sigma_{s1}, \sigma, t)) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П1.37})$$

## 5. ПРИЛОЖЕНИЕ 2. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРИ $t \rightarrow \infty$

Асимптотические формулы при  $t \rightarrow \infty$  для решений (П1.35–П1.37) можно найти, используя метод Лапласа. Определяющую роль здесь играет

поведение подынтегральных функций интегралов (П1.33, П1.34) в окрестности точки  $\eta = 1$ . Так как функция  $\tilde{C}_n^{(1)}(\sigma, \sigma_{s0}, \eta)$  симметрична по переменным  $\sigma$  и  $\sigma_{s0}$ , то главный асимптотический член во всех формулах (П1.35, П1.36, П1.37) одинаков, и асимптотическая формула имеет вид:

$$\Phi_s(\sigma, \mu, \varphi, t) \approx \Phi_s^{(\text{стаци})}(\sigma, \mu, \varphi) + \frac{\exp(-4\pi\sigma_0 t)}{4\pi\sigma_0 t \ln^2(4\pi\sigma_0 t)} f_s(\sigma, \mu, \varphi), \quad 4\pi\sigma_0 t \gg 1, t \rightarrow \infty. \quad (\text{П2.1})$$

Здесь

$$f_s(\sigma, \mu, \varphi) = f(\sigma, \sigma_{s0}, \mu, \varphi) - f(\sigma, \sigma_{s1}, \mu, \varphi),$$

$$f(\sigma, \sigma_{s0}, \mu, \varphi) = \frac{Q}{4\pi\sigma_0} \sum_{n=1}^{N_s} (2n+1) \left\{ a_n(\sigma, \sigma_{s0}) P_n(\cos \gamma) + b_n(\sigma, \sigma_{s0}) P_n(\cos \gamma_1) \right\},$$

$$a_n(\sigma, \sigma_{s0}) = \frac{1}{2} (\tilde{a}_n(\sigma, \sigma_{s0}) + \tilde{\tilde{a}}_n(\sigma, \sigma_{s0})),$$

$$b_n(\sigma, \sigma_{s0}) = \frac{1}{2} (\tilde{a}_n(\sigma, \sigma_{s0}) - \tilde{\tilde{a}}_n(\sigma, \sigma_{s0})),$$

$$\tilde{a}_n(\sigma, \sigma_{s0}) = \frac{\left( \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sigma\sigma_{s0}}} \right)^{\xi_n+1} \tilde{V}_n \left( \frac{\sigma_0}{\sigma}, \frac{\sigma_0}{\sigma_m} \right) \tilde{V}_n \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{s0}}, \frac{\sigma_0}{\sigma_m} \right)}{\tilde{W}_n^2 \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_m} \right)}. \quad (\text{П2.2})$$

Отметим, что асимптотическая формула для сферического среднего от потенциала не получается из формулы (П2.1). Это связано с тем, что формулы (П1.36)–(П1.37) содержат интеграл, не-

зависящий от  $\theta$  и  $\phi$ . Именно этот интеграл определяет асимптотическую формулу для сферического среднего потенциала. Например, в области  $h_{s1} < h < h_m$

---


$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int \Phi_s \sin \theta d\theta d\phi \approx V_{\infty,s} - \frac{Q_s}{4\pi\sigma_{s0}} \frac{\exp(-4\pi\sigma_{s0}t)}{4\pi\sigma_{s0}t}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (\text{П2.3})$$


---

Временной множитель формулы (П2.1) зависит от  $\sigma_0$ , а формулы (П2.3) от  $\sigma_{s0}$ . Сферическое среднее приближается при  $t \rightarrow \infty$  к  $V_{\infty,s}$  снизу. Численные расчеты по формуле (П2.1) (см. рис. 2) показывают, что на верхней границе атмосферы в окрестности точек  $(\theta_s, \phi_s)$  и  $(\pi - \theta_s, \phi_s)$  потенциал  $\Phi_s$  стремится к  $\Phi_s^{(\text{стаци})}$  сверху, а в окрестностях точек  $(0, \phi_s)$  и  $(\pi, \phi_s)$  – снизу.

Полученные результаты этой статьи могут быть использованы при моделировании глобальной электрической цепи с учетом влияния магнитосферы на распределение электрического поля в атмосфере.

## 6. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. В работе найдено аналитическое решение нестационарной задачи для потенциала электрического поля токового диполя в атмосфере, занимающей шаровой слой, проводимость которой экспоненциально возрастает по радиусу, с граничными условиями, учитывающими связь электрического потенциала и тока в магнито-сопряженных точках верхней границы шарового слоя. Аналитическое решение представляется формулами (П1.35)–(П1.37) для стационарного токового диполя и (9)–(11) для простейших случаев нестационарного тока.

2. Получено аналитическое выражение для функции Грина начально-краевой задачи, для уравнения, соответствующего уравнению (8) (формулы (10), (П1.27)).

3. Проведен численный анализ изменения потенциала электрического поля с течением времени

для модельных правых частей уравнения ( $N_s = 20$ ) на радиальном луче расположения зарядов в нижней атмосфере. Показано монотонное стремление потенциала электрического поля с течением времени при  $t \rightarrow \infty$  к стационарному потенциалу в окрестности отрицательного заряда грозового облака и немонотонное в окрестности положительного заряда.

4. Получены асимптотические формулы (П2.1)–(П2.2) для электрического потенциала токового диполя при  $t \rightarrow \infty$ , учитывающие зависимость от пространственных координат. Проведен анализ изменения потенциала электрического поля с течением времени в верхней части шарового слоя для токового диполя ( $N_s = \infty$ ). Показано, что на оси расположения токового диполя на верхней границе атмосферы потенциал электрического поля с течением времени уменьшается, а на геомагнитных полюсах увеличивается.

5. При исследовании более сложных модельных задач с распределенным источником тока результаты, полученные в статье, могут оказаться полезными, так как позволяют записать аналитическое решение для широкого класса правых частей уравнения (8) в виде свертки с функцией Грина.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

— Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1100 с. 1963.

- Денисова Н.А., Калинин А.В. Влияние выбора граничных условий на распределение электрического поля в моделях глобальной электрической цепи // Изв. вузов. Радиофизика. Т. 61. № 10. С. 831–842. 2018.
- Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. 576 с. 1976.
- Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 736 с. 1973.
- Мареев Е.А. Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи // УФН. Т. 180. № 5. С. 527–524. 2010.
- Мареев Е.А., Стасенко В.Н., Шаталина М.В., Дементьева С.О., Евтушенко А.А., Свечникова Е.К., Слюняев Н.Н. Российские исследования в области атмосферного электричества в 2015–2018 гг. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. Т. 55. № 6. С. 79–93. 2019.
- Морозов В.Н. Математическое моделирование атмосферно-электрических процессов с учетом влияния аэрозольных частиц и радиоактивных веществ. Монография. Санкт-Петербург: изд-во РГГМУ, 253 с. 2011.
- Морозов В.Н. Модель нестационарного электрического поля в нижней атмосфере // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 45. № 2. С. 268–278. 2005.
- Hays P.B., Roble R.G. Quasi-static model of global atmospheric electricity. 1. The lower atmosphere // J. Geophys. Res. V. 84. № A7. P. 3291–3305. 1979.
- Kalinin A.V., Slyunyaev N.N. Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit // J. Math. Anal. V. 450. Iss.1. P. 112. 2017.
- Ogawa T. Fair-Weather Electricity // J. Geophys. Res. V. 90. № D4. P. 5951–5960. 1985.

## Model of a Global Electric Circuit with Conditions at Magnetic Conjugate Points of the Upper Boundary of the Atmosphere in the Non-Stationary Case

N. A. Denisova\*

*National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (NNSU), Nizhny Novgorod, Russia*

\*e-mail: natasha.denisova@mail.ru

A new analytical representation of the electric potential is obtained for the classical non-stationary model of the global electrical circuit of the atmosphere, occupying a spherical layer, the conductivity of which increases exponentially along the radius. The boundary conditions of the model take into account the relationship between the values of the electric potential and current at magnetically conjugate points of the upper boundary of the atmosphere. Using the obtained representation, the potential distribution for a current dipole in a spherical layer is analyzed. New asymptotic formulas for the electric potential of a current dipole at  $t \rightarrow \infty$  at each point of the spherical layer are obtained. An analytical expression for the Green's function of the corresponding initial-boundary value problem is found.

**Keywords:** atmospheric electricity, global electric circuit, boundary conditions at magnetically conjugate points, non-stationary model, analytical solution