ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, 2024, том 64, № 6, с. 862–870

УДК 550.38, 537.67

ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ МАГНИТНОЙ И КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ГЕОДИНАМО

© 2024 г. С. В. Старченко*

Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В.Пушкова РАН (ИЗМИРАН), Москва, Троицк, Россия

**e-mail: sstarchenko@mail.ru*

Поступила в редакцию 03.03.2024 г.
После доработки 22.05.2024 г.
Принята к публикации 25.07.2024 г.

Уравнения индукции и импульса упрощены до динамической системы для кинетической и магнитной энергий в ядре Земли. Устойчивые стационарные точки этой системы дают геомагнитное поле ~10 мТл и косеканс угла между вектором магнитного поля и вектором скорости течения в среднем около 500 при известной скорости ~1 мм/сек и общепринятой динамо-мощности ~1 ТВт. При общеизвестном характерном геомагнитном времени порядка тысячи лет, получены гармонические вековые вариации порядка нескольких десятилетий и быстрые экспоненциальные изменения – порядка нескольких месяцев, возможно, связанные с джерками. Все это хорошо согласуется с теорией динамо, палеомагнитными реконструкциями, численным моделированием и непосредственными наблюдениями. Геомагнитная энергия ~10 мДж/кг на четыре порядка больше кинетической энергии. В условиях подобного доминирования магнитной энергии получено аналитическое решение, которое со временем сходится к устойчивым стационарным точкам. Обсуждаются, по-видимому, маловероятные катастрофы с практически обнуленной магнитной энергией вблизи частично устойчивых стационарных точек.

Ключевые слова: геодинамо, динамическая система, магнитная энергия, кинетическая энергия, магнитная катастрофа.

DOI: 10.31857/S0016794024060135, **EDN:** QOAYDS

1. ВВЕДЕНИЕ

Полная система уравнений геодинамо, см., например, [Braginsky and Roberts, 1995; Starchenko and Jones, 2002] чрезвычайно сложна, поскольку включает в себя уравнение индукции для вектора магнитного поля, уравнение импульса для векторного поля скорости проводящей жидкости и, по сути, энергетические уравнения тепломассопереноса для энтропии и легкой примеси. С конца прошлого века [Glatzmaier and Roberts, 1995] по настоящее время создано множество численных моделей [Christensen et. al, 2010; Bouligand et. al, 2016; Wicht and Sanchez, 2019; Aubert, 2023], которые достаточно успешно имитируют известную динамику геомагнитного поля на основе, практически полной системы. Однако ключевые параметры (и прежде всего коэффициенты переноса) всех подобных моделей отличаются на много порядков от их истинных значений, и приходится делать чрезвычайно далекие экстраполяции к реальным величинам. Поэтому весьма актуальны упрощенные модели, среди которых представляются наиболее достоверными модели среднего поля, см., например, [Krause and Rädler, 1980; Рузмайкин и Старченко, 1988]. Но и они остаются достаточно сложными для непосредственного анализа и, при этом, опираются на недоказанные гипотезы. Также используются упрощения в духе классического метода Галеркина, см., например, [Водинчар, 2013; Юшков и Соколов, 2018; Moffatt and Dormy, 2019], когда искомые величины (и прежде всего магнитное поле) аппроксимируют на основе физических соображений простейшими собственными или им подобными функциями.

Цель этой работы – на базе интегральных уравнений импульса и магнитной индукции, создать простейшую подобную геодинамо динамическую систему для суммарных кинетических и магнитных энергий. Эти энергии далее выражаются через среднеквадратичную скорость и среднеквадратичное магнитное поле, квадраты которых прямо пропорциональны соответствующим удельным (в Дж/кг) энергиям. Такое представление является способным отразить глобальные инверсии или экскурсы всего магнитного поля, если положительно определенному среднеквадратичному магнитному полю приписать определенной знак, так чтобы эта величина оставалась непрерывной и, возможно, гладкой функцией при переходе через ноль. В этой работе исследованы стационарные точки и найдено аналитическое подобное геодинамо решение для полученной динамической системы при фиксированных во времени параметрах.

В следующем разделе выводится искомая система уравнений исходя из уравнения магнитной индукции и уравнения импульса. Энергетические и прочие уравнения геодинамо аппроксимируем тем, что интегральная мощность работы силы плавучести Архимеда задается как общепринятая величина ~1 ТВт [Braginsky and Roberts, 1995; Starchenko and Jones, 2002; Aubert, 2023]. Определяется новый комбинированный и, по сути, структурный параметр L. Он равен произведению характерного размера на характерный же косеканс угла между вектором магнитного поля и скоростью. Этим косекансом оцениваем, насколько магнитное поле “вморожено” в течение, или точнее – насколько оно параллельно течению.

Третий раздел этой работы посвящен устойчивым и неустойчивым стационарным точкам полученной упрощенной системы для среднеквадратичной скорости и магнитного поля, которые непосредственно отражают кинетическую и магнитную энергию. Приводятся оценки физических величин, вытекающие из анализа стационарных точек. Все они хорошо согласуются с известными современными численными, теоретическими, а главное – наблюдательными моделями геомагнитного поля. При этом получены и новые соотношения.

В четвертом разделе найдено аналитическое решение полученной динамической системы в условиях типичного для геодинамо доминирования магнитной энергии над кинетической энергией. При неизменной со временем положительной мощности силы Архимеда это аналитическое решение при любом возможном начальном условии со временем асимптотически приближается к фиксированным же значениям, которые задаются устойчивыми стационарными точками исследуемой динамической системы. Если при достаточно большой турбулентной флуктуации мощность силы Архимеда на определенное время становится отрицательной – то возможно убывание всей магнитной энергии практически до нуля. Это принципиально маловероятное событие может быть соотнесено с ранее не исследованными глобальными и, возможно, катастрофическими экскурсами или инверсиями.

В разделе 5 приводятся и обсуждаются основные результаты этой работы.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ

Далее в этом разделе выводится простейшая динамическая система из двух автономных обыкновенных дифференциальных уравнений для кинетической и магнитной энергий геодинамо. Эти энергии представлены через среднеквадратичную скорость конвекции и среднеквадратичное магнитное поле соответственно. Знак исследуемого магнитного поля, при этом, может быть как положительным, так и отрицательным.

Для получения уравнения эволюции среднеквадратичной скорости $u(t)$, проинтегрируем по всему объему жидкого ядра Земли скалярные произведения вектора скорости $\mathbf{U}$ на все члены уравнения импульса. В результате тождественных преобразований и пренебрежения описанными далее малыми членами (детали смотрите, например, в [Braginsky and Roberts, 1995; Buffett and Bloxham, 2002; Starchenko, 2019]) получим

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{r_i}^{r_o} \rho \frac{U^2}{2} dV\right) = \int_{r_i}^{r_o}\left(\rho \mathbf{A}\cdot\mathbf{U} - \frac{\mathbf{U}\times\mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{B}}{\mu_0} - \rho\nu\left|\nabla\times\mathbf{U}\right|^2\right)dV. \quad (1)$$

Здесь в пределах интегралов r_i и r_o обозначают радиус границы жидкого ядра с твердым ядром и с мантией соответственно, ρ – средняя плотность, а ν – коэффициент кинематической вязкости. Вектор ускорения $\mathbf{A}$ обусловлен силой плавучести Архимеда, порождающей конвекцию, которая, в свою очередь, генерирует магнитное поле с вектором $\mathbf{B}$. Соответственно первый член (1) справа – это интегральная мощность (общепринято ~1 ТВт) работы силы плавучести, которая порождает геодинамо.

На первый взгляд представляется, что один из самых значимых градиентов скорости связан с возможно самыми узкими (толщиной ~1 м см., например, в [Braginsky and Roberts, 1995]) слоями Экмана у границ жидкого ядра. В необходимой здесь энергетической части этот эффект учитываются последним членом в уравнении (1). Соответствующими же вязкими поверхностными интегралами [Braginsky and Roberts, 1995; Starchenko, 2019] пренебрегли в (1) прежде всего из-за гравитационного и электромагнитного блокирования относительного вращения твердого ядра мантией [Dumberry and Mound, 2010]. Это блокирование приводит к тому, что разница между угловыми скоростями мантии и твердого ядра уменьшается настолько, что энергетика глобальных конвективных процессов существенно доминирует над обусловленными этой разницей вязкими эффектами в узких слоях Экмана.

Поделим (1) на массу жидкого ядра M. Получим в левой части (1) прямо по определению $u\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$. Первая справа – удельная интегральная мощность силы плавучести Архимеда a, которую считаем фиксированной во времени. Далее следует удельная мощность магнитной силы Лоренца, которую, опираясь на степени входящих в нее скорости и магнитного поля, естественно оценить как $ub^2/(L\rho\mu_0)$. Здесь L – характерный внешний масштаб, деленный, опираясь на соответствующее векторное произведение, на типичный синус s угла между векторами скорости и магнитного поля.

Составной параметр L, объединяет в себе характерный пространственный размер магнитного поля l и меру того, насколько силовые линии магнитного поля параллельны линиям тока течения проводящей жидкости. Величина косеканса (обратного синуса $1/s$) угла между вектором скорости и магнитным полем предлагается здесь в качестве такой меры, которая, по-видимому, пропорциональна некоторой степени магнитного числа Рейнольдса. Чем больше это число – тем сильнее поле “вморожено” в течение, см., например, [Moffatt, Dormy, 2019]. И хотя то, что поле “вморожено” не эквивалентно обсуждаемой здесь параллельности, но, безусловно, какая-то связь между ними должна существовать. Характерный же размер магнитного поля l может быть получен как непосредственно из наблюдений [Старченко, 2015], так и теоретически [Starchenko, 2014, 2019]. Таким образом, окончательно определим параметр $L = l/s$.

Замыкает рассматриваемое отношение (1)/M удельная интегральная мощность силы диффузии, которую естественно оценить как $-u^2/T_u$. Таким образом, в рамках развиваемого подхода интегралы представлены через их составляющие, которым они прямо пропорциональны. Время T_u – диффузионное, а b – среднеквадратичное магнитное поле. В результате получаем эволюционное уравнение для скорости

$$u\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = a - ub^2/(L\rho\mu_0) - u^2/T_u. \qquad (2)$$

Аналогичным образом скалярно умножим обе части уравнения индукции на вектор магнитного поля, проинтегрируем по объему и получим (σ – проводимость):

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{r_i}^{r_o}\frac{B^2}{2\mu_0}dV\right) = \int_{r_i}^{r_o}\left(\frac{\mathbf{U}\times\mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{B}}{\mu_0} - \frac{|\nabla\times\mathbf{B}|^2}{\mu_0^2\sigma}\right)dV. \qquad (3)$$

Деля теперь все члены выражения (3) на объем жидкого ядра и на основе представленных выше соображений, окончательно получим эволюционное уравнение для магнитного поля (T_b – диффузионное время для магнитного поля):

$$bdb/dt = ub^2/L - b^2/T_b. \qquad (4)$$

Это уравнение (4) вместе с уравнением (2) и составляет искомую систему.

3. СТАЦИОНАРНЫЕ ТОЧКИ

Стационарные точки полученной выше системы из (2) и (4) находятся стандартным образом – приравниваем правые части к нулю и решаем соответствующие алгебраические системы. При этом все рассматриваемые в этом разделе параметры считаем постоянными. Обоснование такому предположению дается далее в тексте после того как будут получены необходимые для такого обоснования значения ключевых параметров.

Начнем со стационарных точек системы (2, 4), соответствующих ненулевому магнитному полю (индекс – S):

$$u_S = L/T_b = u_*,$$
$$b_S = \pm\left\{\rho\mu_0\left[T_b a - L^2/(T_u T_b)\right]\right\}^{1/2}. \qquad (5, 6)$$

Здесь u_* – типичная скорость. Известное теоретически и из наблюдений значение этой скорости 1 мм/с [Braginsky and Roberts, 1995; Starchenko and Jones, 2002; Christensen et. al, 2010; Starchenko, 2019] вместе с тысячелетним $T_b = 30$ Гс [Bouligand, 2016; Старченко и Яковлева, 2021; Panovska et. al, 2013] дают $L = 30$ Мм. Это на порядок превышает радиус ядра Земли, свидетельствуя о соответствующем и весьма существенном превышении критического уровня геодинамо. Следуя определению $L= l/s$ в предыдущем разделе и значению $l = 60$ км из [Старченко, 2015] получаем типичный косеканс $1/s = 500$. Эта весьма значительная величина соответствует упомянутой выше значительной “параллельности” течения и поля, а также большому магнитному числу Рейнольдса $\mathrm{R_m} = \sigma\mu_0 u_S$ с $= 3500$

(радиус ядра c =3.5 Мм, а коэффициент магнитной диффузии $1/\sigma\mu_0$=1 м^2/с).

Трактовка динамо-системы через размер L и особенно косеканс $1/s$ соответствует ранее мало обсуждаемому механизму равновесия среднеквадратичной величины магнитного поля за счет обратного влияния на течение. Здесь можно предположить, что в значительной степени такое равновесие обусловлено тенденцией к установлению параллельности магнитного поля и скорости течений. При этом не требуется существенного подавления среднеквадратичных величин скорости для достижения равновесия, а достаточно лишь изменения структуры генерируемого магнитного поля, чтобы оно повсюду стало преимущественно параллельно скорости течения. Для геодинамо эта параллельность огромна – $1/s = 500$ (!), что означает весьма незначительное изменение поля скорости по сравнению с немагнитной ситуацией и, напротив – огромное изменение магнитного поля по сравнению с околокритическим уровнем генерации магнитного поля. Разумеется, требуется дальнейшее обоснование этому предположению из теоретических и численных моделей, которые позволят, в частности, связать R_m с $1/s$.

Используемая здесь удельная мощность геодинамо a около 0.3 пВт/кг, как это было показано Starchenko and Jones [2002], которые и ввели этот параметр. Вместе с тем, связанным с a параметром является суммарная мощность силы Архимеда или работы плавучести, которая в наших обозначениях aM, что порядка 1 ТВт, а M – масса жидкого ядра. Эта, порождающая конвекцию и геомагнетизм, суммарная мощность известна с самых времен зарождения [Брагинский, 1964; Lowes, 1970; Jacobs, 1975] проблематики геодинамо и используется во многих (если не во всех) работах касающихся энергетических аспектов геодинамо.

Для успешной генерации или вернее – для самого существования значимого стационарного магнитного поля необходимо, следующее из положительности подкоренного выражения в (6) и приведенных выше оценок, выполнение порогового условия

$$T_u > 3 \text{ Мс}. \tag{7}$$

Это условие, скорее всего, выполняется с практически тысячекратным запасом, поскольку турбулентное значение магнитного диффузионного времени T_b должно быть сопоставимо с также турбулентным диффузионным временем T_u [Braginsky and Roberts, 1995; Shebalin, 2018]. Соответственно типичное среднеквадратичное поле $b_* = (\rho\mu_0 T_b a)^{1/2}$ из (6) довольно велико – около 10 мТл (100 Гс) в недрах жидкого ядра Земли. Это соответствует геодинамо сильного поля, которое впервые предложил Станислав Иосифович Брагинский [1964]. При этом относительная геомагнитная энергия $b_*^2/2\mu_0\rho$ порядка 10^{-2} Дж/кг, что значительно больше относительной кинетической энергии $u_*^2/2 \sim 10^{-6}$ Дж/кг. Это превышение на порядки далее считается характерным признаком типичной системы, подобной геодинамо следуя [Braginsky and Roberts, 1995; Starchenko and Jones, 2002; Christensen et. al, 2010] и многим другим. Соответственно вводится малый параметр, равный отношению $\mu_0\rho u_*^2/b_*^2$ кинетической и магнитной энергий. Очевидно, что здесь этот параметр равен $u_*^2/T_b a$.

Таким образом, полученные стационарные точки из (5-6) хорошо согласуются с геомагнитными наблюдениями, численными моделями и общепринятыми положениями геодинамо теории. Фактически, основываясь на характерном времени магнитной диффузии T_b, известной миграции силовых линий со скоростью u_* и достаточно уверенно оцениваемой мощности a, получаем новый структурный параметр $L = l/s$, характерную величину магнитного поля b_*, отношение кинетической и магнитной энергий $u_*^2/T_b a$.

Однако в связи с тем, что реальные параметры (и прежде всего a) рассматриваемой системы не стационарны, а зависят от времени – то на первом этапе имеет смысл исследовать устойчивость полученных стационарных точек. При этом на некотором сравнительно небольшом временном интервале (реально меньшем T_b) приближенно вполне можно считать параметры постоянными, чтобы из линейной системы максимально в общем виде оценить устойчивость и динамику всевозможных малых отклонений от стационарных точек. Рассмотрим эти отклонения ε и δ, которые подставляются через $u = \varepsilon + u_S$ и $b = \delta + b_S$ в (2, 4). Оставляя только малые величины первого порядка, получаем искомую линейную систему

$$u_S \mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t =$$
$$= -\left[(b_S)^2\varepsilon + 2u_S b_S \delta\right]\Big/\left(L\rho\mu_0\right) - 2u_S\varepsilon/T_u, \quad (8, 9)$$
$$\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t = \left(b_S\varepsilon + u_S\delta\right)/L - \delta/T_b.$$

Это линейная система второго порядка, ее общее решение запишем в следующем виде:

$$\begin{gathered}\delta = C_+\exp\left(k_+t\right) + C_-\exp\left(k_-t\right),\\ \varepsilon = L\left(\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t\right)/b_S,\end{gathered} \tag{10, 11}$$

$$k_{\pm} = -\left(T_b{}^2 a/L^2 + 1/T_u\right)/2 \pm$$
$$\pm\left[\left(T_b{}^2 a/L^2 + 1/T_u\right)^2/4 - 2T_b a/L^2 - 2/\left(T_u T_b\right)\right]^{1/2}. \quad (12)$$

Если геодинамо активно, то – удельная мощность силы Архимеда $a > L^2/(T_u T_b^2)$, смотрите (6), и действительная часть (12) отрицательна. Поэтому мы констатируем, что стационарные точки (5-6) являются устойчивыми. При малых отклонениях от этих точек система к ним возвращается, уменьшая исходное отклонение в e раз за примерно несколько месяцев при принятых выше значениях параметров, что согласуется со сравнительно короткими геомагнитными периодами, наиболее возможно ярко проявляющимися в таких явлениях как джерки [Aubert and Finlay, 2019]. Мнимая же часть (12) дает периодические колебания с периодами около нескольких десятилетий, которые согласуются с общеизвестными вековыми геомагнитными вариациями. Все эти и описанные выше временные интервалы также хорошо согласуются с непосредственными наблюдениями, палеомагнитными реконструкциями, численным моделированием и известными теоретическими положениями, см., например, [Arneitz et al., 2021; Panovska et al., 2013; Aubert, 2023; Moffatt and Dormy, 2019].

Отметим, что даже самый длительный из связанных с устойчивостью интервалов на один-два порядка меньше магнитного времени T_b, что подтверждает исходное предположение о возможности использовать фиксированные во времени параметры системы на сравнительно коротких временных промежутках.

Завершим этот раздел исследованием стационарных точек с нулевым магнитным полем:

$$b_0 = 0, u_0 = \pm\left(T_u a\right)^{1/2}. \quad (13)$$

Аналогичная (8-9) система для определения устойчивости принимает простейший вид

$$\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t = u_0\delta/L - \delta/T_b,\ \mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t = -2\varepsilon/T_u. \quad (14, 15)$$

Очевидно, что переменные разделились и уравнение (15) дает наипростейшее и заведомо устойчивое решение $\sim\exp(-2t/T_u)$ для скорости, а уравнение (14) дает решение $\sim\exp(u_0 t/L - t/T_b)$ для магнитного поля. Последнее решение неустойчиво при достаточно большой реалистической (смотрите выше в этом разделе) скорости конвекции $u_0 > L/T_b$ и устойчиво при противоположном неравенстве. Такие частично устойчивые стационарные точки могут соответствовать не столько общеизвестным инверсиям/экскурсам (при которых суммарная магнитная энергия остается вполне значимой, см., например, [Moffatt and Dormy, 2019; Gwirtz et al., 2021]), а сколько пока еще не исследованным катастрофам с практически обнулением всего магнитного поля.

4. ПОДОБНОЕ ГЕОДИНАМО РЕШЕНИЕ

В приведенном выше уравнении (2) для скорости практически совпадают порядки величин члена слева $\sim u_*^2/T_b$ и последнего члена справа $\sim u_*^2/T_u$ из-за сильно турбулентного характера течений, при котором время магнитной диффузии T_b сравнимо со временем диффузии T_u [Braginsky and Roberts, 1995; Shebalin, 2018]. Второй справа член по порядку величины совпадает с первым членом a. Разделив u_*^2/T_b на a, получим отношение кинетической и магнитной энергий, которое чрезвычайно мало для подобной геодинамо системы, см. детали в предыдущем разделе. Поэтому в главном порядке подобного геодинамо приближения система уравнений (2) и (4) упрощается до

$$a = ub^2/\left(L\rho\mu_0\right), b\mathrm{d}b/\mathrm{d}t = \rho\mu_0 a - b^2/T_b. \quad (16, 17)$$

Общее решение этой системы запишем в виде (C – константа интегрирования):

$$u = \rho\mu_0 La/b^2,$$
$$b = \pm\left[\rho\mu_0 T_b a - C\exp\left(-2t/T_b\right)\right]^{1/2}. \quad (18, 19)$$

Начальное (при $t = 0$) значение $b = \pm(\rho\mu_0 T_b a - C)^{1/2}$ может быть любым, определяя соответствующее C при заданном $\rho\mu_0 T_b a$ и знаке перед скобкой. С течением времени величина среднеквадратичного магнитного поля асимптотически приблизится к значению $\pm[\rho\mu_0 T_b a)]^{1/2}$, которое соответствует стационарным точкам (6) в рассматриваемом приближении. Поскольку, по физической сути, рассматриваемое магнитное поле b это корень квадратный от всей суммарной магнитной энергии – то не удивительно, что при используемых здесь фиксированных во времени параметрах эта энергия стремится к некоторой фиксированной же величине. В рамках такого подхода невозможно описать общеизвестные инверсии или экскурсы, поскольку они в первую очередь ориентированы на дипольную составляющую, которая вносит весьма малый вклад в рассматриваемую здесь суммарную магнитную энергию геодинамо, см. [Glatzmaier and Roberts, 1995; Braginsky and Roberts, 1995; Старченко и Смирнов, 2021; Gwirtz et al., 2021].

Достижение нулевого поля в (19) формально возможно только при $t=0$ и $C = \rho\mu_0 T_b a$. При этом единственном варианте поле равно нулю только в начальный момент, а потом происходит монотонный рост b^2 со временем. Если же предположить, что на какой-то временной промежуток a стало отрицательным – то при $C = \rho\mu_0 T_b a$ получаем b^2 убывающее с некоторого момента $t < 0$ в прошлом до нуля в момент $t=0$. Таким образом, может быть получена своего рода "предтеча глобального экскурса/инверсии", когда вся магнитная энергия практически обнуляется и происходит переход в "зону влияния" частично устойчивой стационарной точки (13). Говорим пока лишь о "предтече" из-за присутствующей вблизи $b = 0$ сингулярности для u в (18).

5. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Главный результат этой работы – построение на основе интегральных уравнений, по-видимому, наипростейшей динамической системы, которая достаточно корректно описывает подобную геодинамо эволюцию суммарной кинетической и магнитной энергий. Корректность этой системы показана при использовании в качестве известных входных параметров, хорошо оцениваемых из наблюдений, численно и из теории: характерной скорости u_*~1 мм/с, типичного времени магнитной диффузии T_b~1 тыс. лет и суммарной мощности геодинамо ~1 ТВт = aM (M – масса жидкого ядра).

Произведение скорости и времени дает новый выходной параметр $L = 30$ Мм, который является, по-видимому, оптимально комбинированным структурным параметром $L=l/s$, сочетающим в себе характерный магнитный масштаб l и типичный синус s угла между векторами скорости и магнитного поля. Этот составной параметр L, объединяет в себе характерный пространственный размер магнитного поля l и меру того, насколько силовые линии магнитного поля параллельны линиям тока течения проводящей жидкости. Величина косеканса (обратного синуса $1/s$) угла между вектором скорости и магнитным полем предлагается здесь в качестве такой меры, которая, по-видимому, пропорциональна некоторой степени магнитного числа Рейнольдса. Чем больше это число – тем сильнее поле "вморожено" в течение, см., например, [Moffatt and Dormy, 2019]. И хотя то, что поле "вморожено" не эквивалентно обсуждаемой здесь параллельности, но, безусловно, какая-то связь между ними должна существовать. Характерный же размер магнитного поля l может быть получен как непосредственно из наблюдений [Старченко, 2015], так и теоретически [Starchenko, 2014; 2019]. Таким образом, окончательно определим параметр $L = l/s$.

Трактовка динамо-системы через размер L и особенно косеканс $1/s$ соответствует ранее мало обсуждаемому механизму равновесия среднеквадратичной величины магнитного поля за счет обратного влияния на течение. Здесь можно предположить, что в значительной степени такое равновесие обусловлено тенденцией к установлению параллельности магнитного поля и скорости течений. При этом не требуется существенного подавления среднеквадратичных величин скорости для достижения равновесия, а достаточно лишь изменения структуры генерируемого магнитного поля, чтобы оно повсюду стало преимущественно параллельно скорости течения. Для геодинамо эта параллельность огромна – $1/s = 500$ (!), что означает весьма незначительное изменение поля скорости по сравнению с немагнитной ситуацией и, напротив – огромное изменение магнитного поля по сравнению с околокритическим уровнем генерации магнитного поля. Разумеется, требуется дальнейшее обоснование этому предположению из теоретических и численных моделей, которые позволят, в частности, связать R_m с $1/s$.

Второй выходной параметр – вязкое диффузионное время, которое из-за развитой турбулентности попросту считаем порядка той же 1 тыс. лет, как и время магнитной диффузии.

Следующие выходные параметры связаны со стационарными точками системы и их устойчивостями.

Полученное типичное среднеквадратичное поле довольно велико – около 10 мТл (100 Гс), что соответствует геодинамо сильного поля, которое впервые предложил Станислав Иосифович Брагинский [Брагинский, 1964]. При этом удельная геомагнитная энергия ~10 мДж/кг значительно больше удельной кинетической энергии ~0.001 мДж/кг. Введем новый параметр, скажем, E, для отношения кинетической и магнитной энергий, которое здесь равно $u_*^2/T_b a$. Предлагается считать, что малое $E << 1$ является характерным признаком типичной подобной геодинамо системы. Как ни странно, но подобное предположение, похоже, ранее не постулировалось.

При малых отклонениях от устойчивых стационарных точек система к ним возвращается, уменьшая исходное отклонение в e раз за примерно несколько месяцев, что согласуется с самыми короткими здесь геомагнитными периодами, которые, возможно, наиболее ярко проявляются в таких явлениях как джерки.

Вблизи устойчивых стационарных точек существуют и периодические колебания с периодами около нескольких десятилетий, что хорошо согласуется с общеизвестными вековыми геомагнитными вариациями. Все эти и описанные выше временные интервалы также хорошо согласуются с непосредственными наблюдениями, палеомагнитными реконструкциями, численным моделированием и известными теоретическими положениями, см., например, [Arneitz et al., 2021; Panovska et al., 2013; Aubert, 2023; Moffatt and Dormy, 2019; Starchenko, 2014].

Таким образом, полученная из интегральных уравнений наипростейшая динамическая система позволяет физически обосновать сразу три важнейших характерных времени: диффузионное время (около тысячи лет), время вековых вариаций (десятки лет) и самое короткое время (порядка нескольких месяцев), которое может отвечать джеркам, а возможно еще и другим неисследованным явлениям. При этом определяется новый структурный параметр – косеканс $1/s$ типичного угла между вектором магнитного поля и вектором скорости, который характеризует параллельность магнитного поля и течения проводящей жидкости. Произведение этого косеканса на характерный размер магнитного поля дает еще один новый, по сути, критический параметр L, который на порядок превышает радиус ядра Земли, свидетельствуя о том, что критический уровень возбуждения геодинамо весьма существенно превышен. Актуализируется и другой малоизученный, но, по-видимому, важный параметр – отношение кинетической и магнитной энергий E, которое мало для систем подобных геодинамо. Для самого геодинамо этот параметр $\sim 10^{-4}$ при полученном здесь характерном магнитном поле ~10 мТл.

Найдено аналитическое решение полученной динамической системы в условиях типичного для геодинамо доминирования магнитной энергии над кинетической энергией, когда $E << 1$. При стационарной во времени положительной мощности силы Архимеда a это аналитическое решение при любом возможном начальном условии со временем асимптотически стремится к постоянным значениям, которые задаются устойчивыми стационарными точками исследуемой динамической системы.

Если мощность силы Архимеда на какое-то время становится отрицательной в результате большой и, по-видимому, маловероятной флуктуации – то возможна убывающая практически до нуля магнитная энергия, которая может быть соотнесена с глобальными катастрофическими экскурсами/инверсиями вблизи частично устойчивых стационарных точек. Физически мощность силы Архимеда – это первый член справа в формуле (1). Этот член определяется преимущественно положительным (при работающем динамо) скалярным произведением радиальной компоненты скорости на ускорение, обусловленное силой плавучести Архимеда. Однако при столь высокоразвитой турбулентности как в геодинамо возможны гигантские флуктуации, приводящие к отрицательным значениям рассматриваемого первого члена (1). Очевидно, что такие флуктуации крайне маловероятны для осуществления уменьшения магнитной энергии почти до нуля, поскольку они должны быть для этого весьма велики и непрерывно проявиться на достаточно длительном временном интервале от тысячи лет.

Следует особо отметить, что полученная система принципиально не может напрямую отражать общеизвестные экскурсы или инверсии, поскольку они в первую очередь связаны с дипольной компонентой, которая обычно на несколько порядков (по энергии) меньше рассматриваемой здесь суммарной магнитной энергии геодинамо. Вместе с тем, определенная эволюция энергии может быть предвестником обычной инверсии или экскурса [Gwirtz et. al, 2021]. Однако, обсуждаемые здесь, похоже, впервые, катастрофические, по сути, инверсии/экскурсы с почти нулевой магнитной энергией могут оказаться несравненно разрушительнее всех этих общеизвестных инверсий/экскурсов геомагнитного диполя.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор глубоко признателен обоим анонимным рецензентам, которые своими весьма содержательными замечаниями вдохновили автора на кардинальную переделку и существенное расширение работы, которые качественно улучшили как научное содержание, так и формальное представление этой работы. Особая благодарность первому рецензенту, который весьма плотно прошелся по всему тексту и сделал впечатляющий ряд научных и стилистических замечаний, которые позволили автору внести как новые, так и несравненно более корректные положения, способствующие еще большому улучшению этой работы.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджета Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН в рамках государственного финансирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

– *Брагинский С.И.,* Магнитная гидродинамика земного ядра // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 4. № 5. С. 898–916. 1964.

– *Водинчар Г.М.* Использование собственных мод колебаний вязкой вращающейся жидкости в задаче крупномасштабного динамо // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. Выпуск 2(7). С. 33–42. 2013. https://doi.org/10.18454/2079-6641-2013-7-2-33-42

– *Старченко С.В., Рузмайкин А.А.* Кинематическое – турбулентное геодинамо средних полей // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 28. № 3. С. 475–490. 1988.

– *Старченко С.В.* Наблюдательная оценка магнитного поля и параметров геодинамо под поверхностью ядра Земли // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 55. № 5. С. 712–718. 2015. https://doi.org/10.7868/s0016794015050181

– *Старченко С.В.* Энергетические параметры геодинамо совместимые с аналитическими, численными, палеомагнитными моделями и наблюдениями // Физика Земли. № 5. С. 1–15. 2017. https://doi.org/10.7868/s0002333717050131

– *Старченко С.В., Яковлева С.В.* Двухвековая эволюция и статистика времен вариаций энергии потенциального геомагнитного поля // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 61. № 5. С. 661–671. 2021. https://doi.org/10.31857/s0016794021050138

– *Старченко С.В., Смирнов А.Ю.* Объемные токи современного магнитного диполя в ядре Земли // Физика Земли. № 4. С. 42-46. 2021. https://doi.org/10.31857/S0002333721040086

– *Юшков Е.В., Соколов Д.Д.* Инверсии геомагнитного поля и динамо-всплески в рамках простой модели геодинамо // Физика Земли. № 4. С. 121–126. 2018.

– *Arneitz P., Leonhardt R., Egli R., Fabian K.* Dipole and Nondipole Evolution of the Historical Geomagnetic Field From Instrumental, Archeomagnetic, and Volcanic Data // JGR Solid Earth. V. 126. issue 10 e2021JB022565. 2021. https://doi.org/10.1029/2021jb022565

– *Aubert J.* State and evolution of the geodynamo from numerical models reaching the physical conditions of Earth's core // Geoph. J. Int. V. 235 (1). P. 468–487. 2023. https://doi.org/10.1093/gji/ggad229

– *Aubert J., Finlay C.C.* Geomagnetic jerks and rapid hydromagnetic waves focusing at Earth's core surface // Nat. Geosci. V. 12. P. 393–398. 2019. https://doi.org/10.1038/s41561-019-0355-1

– *Bouligand C., Gillet N., Jault D., Schaeffer N., Fournier A., Aubert J.* Frequency spectrum of the geomagnetic field harmonic coefficients from dynamo simulations // Geoph. J. Int. V. 207. P. 1142–1157. 2016. https://doi.org/10.1093/gji/ggw326

Braginsky S.I., Roberts P.H. Equations governing convection in the Earth's core and the geodynamo // Geoph. Astroph. Fluid Dyn. V. 79. P. 1–97. 1995. https://doi.org/10.1080/03091929508228992

– *Buffett B.A., Bloxham J.* Energetics of numerical geodynamo models // Geoph. J. Int. V. 149. P. 211–224. 2002. https://doi.org/10.1046/j.1365-246x.2002.01644.x

– *Christensen U., Aubert J., Hulot G.* Conditions for Earth-like geodynamo models // Earth Planet. Sci. Lett. V. 296. P. 487–496. 2010. https://doi.org/10.1016/j.epsl.2010.06.009

– *Dumberry M., Mound J.* Inner core–mantle gravitational locking and the super-rotation of the inner core // Geophys. J. Int. V. 181. P. 806–817. 2010. https://doi.org/10.1111/j.1365-246x.2010.04563.x

– *Glatzmaier G.A., Roberts P.H.* A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle // Phys. Earth Planet. Int. V. 91(1–3). P. 63–75. 1995.

– *Gwirtz K., Morzfeld M., Fournier A., Hulot G.* Can one use Earth's magnetic axial dipole field intensity to predict reversals? // Geophys. J. Int. V. 225. P. 277–297. 2021. https://doi.org/10.1093/gji/ggaa542

– *Jacobs J.A.* The Earth's core // Academic Press, London, New York, San Francisco. 1975.

– *Krause F., Rädler K.-H.* Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory // Pergamon Press, Oxford. 1980.

– *Lowes F.J.* Possible evidence on core evolution from geomagnetic dynamo theories // Phys. Earth Planet. Int. V. 2. P. 382–385. 1970.

– *Moffatt K.H., Dormy E.* Self-exciting fluid dynamos // Cambridge texts in applied mathematics. Cambridge University Press, Cambridge. 2019. https://doi.org/10.1080/03091929.2019.1690203

– *Shebalin J.V.* Magnetohydrodynamic turbulence and the geodynamo // Phys. Earth Planet. Inter. V. 285. P. 59–75. 2018. https://doi.org/10.3390/fluids6030099

– *Panovska S., Finlay C.C., Hirt A.M.* Observed periodicities and the spectrum of field variations in Holocene magnetic records // Earth Planet. Sci. Lett. V. 379. P. 88–94. 2013. https://doi.org/10.1016/j.epsl.2013.08.010

– *Starchenko S.V.* Analytic scaling laws in planetary dynamo models // Geoph. Astroph. Fluid Dyn. V. 113. № 1–2. P. 71–79. 2019. https://doi.org/10.1080/03091929.2018.1551531

– *Starchenko S.V.* Analytic base of geodynamo-like scaling laws in the planets, geomagnetic periodicities and inversions // Geomagnetism and Aeronomy. V. 54. № 6. P. 694–701. 2014. https://doi.org/10.1080/03091929.2018.1551531

– *Starchenko S.V., Jones C.A.* Typical velocities and magnetic field strengths in planetary interiors // Icarus. V. 157 (2). P. 426–435. 2002. https://doi.org/10.1006/icar.2002.6842

– *Wicht J., Sanchez S.* Advances in geodynamo modeling // Geoph. Astroph. Fluid Dyn., V. 113. № 1–2. P. 2–50. 2019. https://doi.org/10.1080/03091929.2019.1597074

The Simple Model of the Evolution of Magnetic and Kinetic Energy of Geodynamo

S. V. Starchenko*

Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation RAS (IZMIRAN), Troitsk, Moscow

**e-mail: sstarchenko@mail.ru*

The induction and momentum equations are simplified to a dynamical system for the kinetic and magnetic energies in the Earth's core. Stable stationary points of this system give a geomagnetic field of ~10 mT and the cosecant of the angle between the magnetic field vector and the fluid velocity vector is on average about 500 at a known speed of ~1 mm/sec and a generally accepted dynamo power of ~1 TW. With a generally known typical geomagnetic time of the order of a thousand years, harmonic secular variations of the order of several decades and rapid exponential changes of the order of several months, possibly associated with jerks, were obtained. All this is in good agreement with dynamo theory, paleomagnetic reconstructions, numerical modeling and observations. Geomagnetic energy ~10 mJ/kg is four orders of magnitude greater than kinetic energy. Under conditions of such dominance of magnetic energy, an analytical solution was obtained, which over time converges to stable stationary points. Apparently unlikely catastrophes with virtually zero magnetic energy near partially stable stationary points are discussed.

Keywords: geodynamo, dynamic system, kinetic energy, magnetic energy, magnetic catastrophe.